

Analízis I ABC
2. sz. a 3. győztes feladatom
megoldás

-1-

① (a)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)\right]^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2} \cdot 2} = \\ &= \frac{1}{e} \cdot e^2 = \underline{\underline{e}}; \text{ ahol felismerhetjük, hogy:}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} &= e, \text{ ha } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = +\infty. \text{ Mivel} \\ x_n &= \frac{n}{2} \rightarrow +\infty \text{ (ha } n \rightarrow \infty); \end{aligned}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + 3 \cdot 3^n}{n^2 - 3n + 7^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{7} \cdot \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{2}{7}\right)^n + 3}{n^2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n - 3n \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n + 1}}$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}; \text{ ahol}$$

$$x_n = \frac{3 + \left(\frac{2}{7}\right)^n}{1 + n^2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n - 3n \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n} \rightarrow \frac{3+0}{1+0-0} = 3 > 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

miért $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$

ld. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k \cdot q^n) = 0$ ha $q \in (-1, 1)$; most

$q = \frac{1}{7}$; $k=2$ illetve $k=1$.

Így a keresett határérték $= \frac{3}{7} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{3}{7} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{3}{7}}}$
most ha $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = 3 \geq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$ ld. gyök.

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} =$$

1. megközelítés

$$0 \leq \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{\cancel{n!} \cdot n!}{\cancel{n!} (n+1)(n+2) \cdots (n+n)} =$$

$$= \frac{n!}{(n+1)(n+2) \cdots 2n} \leq \frac{n!}{\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{n \text{ tag}}} = \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n}$$

$$\forall k \geq 1 - \text{ve. } (k=1, 2, \dots, n - \text{ve})$$

mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{n^n} \right) = 0 \Rightarrow$ sz. kiegészítés: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = 0$

2. megközelítés: Alkalmazható az alábbi szőkezől
fontosabb módszerrel:

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Teljesít a fenti sorozat helyett vizsgáljuk a

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ sor konvergenciáját; a Weierstrass kritériummal:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{(n!)^2} \cdot (n+1)^2}{\cancel{(n!)^2} \cdot (2n+1)(2n+2)} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1$$

- 3 -

$$\Rightarrow a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \text{ ist konvergent} \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = 0}$$

Teil 1 null-summation ist ein a und n ist absolutwert.

②
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n^2 + \frac{3}{x_n} \right) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Vergleiche x_{n+1} mit x_n :

$$x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(x_n^2 + x_n^2 + \frac{3}{x_n} \right) \geq \sqrt[3]{x_n^2 \cdot x_n^2 \cdot \frac{3}{x_n}} =$$

Schubst
Methode
ergänzt

$$= \sqrt[3]{3} \cdot x_n.$$

Teil 2 ist eine absolute n -wert, konstant, konstant:

$$x_{n+1} \geq \sqrt[3]{3} \cdot x_n \geq \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} x_{n-1} \geq \dots \geq (\sqrt[3]{3})^{n-1} \cdot x_1 =$$

$$= (\sqrt[3]{3})^{n-1} \cdot 1 = (\sqrt[3]{3})^{n-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot (\sqrt[3]{3})^n \rightarrow +\infty, \text{ wo } (n \rightarrow \infty)$$

$\sqrt[3]{3} > 1$ geometrisch
steigt.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1}) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{3})^{n-1} = +\infty$$

Teil 3 $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = +\infty}$ es $\boxed{(x_n) \text{ divergiert!}}$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{n^3(n+1)^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{3n^2 + 3n + 1}{n^3(n+1)^3} \right) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(n+1)^3 - n^3}{n^3(n+1)^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \right) \right) = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^3} \right) = 1.
 \end{aligned}$$

Teljesít a megadott sor konvergens és összege 1.

$$\textcircled{4} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+2)!]^3}{(2n)!(n-1)!}$$

Alkalmazunk a hányados
kritériumot!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+3)!]^3}{(2n+2)! \cdot n!} \cdot \frac{(2n)!(n-1)!}{[(n+2)!]^3} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{[n!]^3} \cdot \cancel{(n+1)^3} \cancel{(n+2)^3} \cancel{(n+3)^3} \cdot \cancel{(2n)!} \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n!)^3} \cdot \cancel{(n+1)^3} \cdot \cancel{(n+2)^3} \cdot \cancel{(2n)!} (2n+1)(2n+2) \cdot \underbrace{n!}_{(n+1) \cdot n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3}{n \cdot (2n+1)(2n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^3} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^3}{\cancel{n^3} \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{1}{4} < 1$$

$\Rightarrow$ Hányados a sm absz. lmv. $\Rightarrow$ lmv. is.

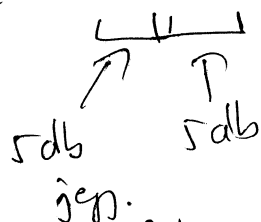
⑤ Elhagyva a harmonikus sorból azokat a tagokat, melyekben a nevezőkben van páros jeg az alábbi sort kapjuk:

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \frac{1}{33} + \frac{1}{35} + \frac{1}{37} + \frac{1}{39} + \dots + \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{111} + \frac{1}{113} + \dots + \frac{1}{999}\right) + \dots$$

Nézzük meg hány tag van a százelekben, ahol ismerint csoportosítottam, hogy hányjegyű a nevező.

A+ 1 jegű számból van nem páros van ⑤ db

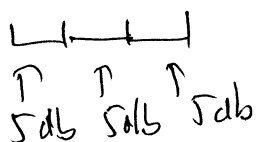
A 2 jegű számból, amelyekben nincs páros jeg van ②⑤ db, mint



5-5 db ponton
jeg (1, 3, 5, 7, 9)

A 3. jegű számból, amelyekben nincs páros jeg

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = \textcircled{125} \text{ szám lesz}$$



Es in tovább...

A kapott fenti sm százelekben lévő kifejezést miveljünk a százelek befutásos tagjával, teljes:

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{111} + \frac{1}{113} + \dots + \frac{1}{999}\right) + \dots <$$

$$< 5 \cdot 1 + 25 \cdot \frac{1}{11} + 125 \cdot \frac{1}{111} + \dots + 5^n \cdot \frac{1}{\underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ db}}} + \dots \ll$$

$$< 5 + \frac{25}{10} + \frac{125}{100} + \dots + \frac{5^n}{10^{n-1}} + \dots =$$

a nevezőket
csökkentjük
10 hatványokkal
írva a helyükre

$$= 5 + \frac{25}{10} \cdot \left(1 + \frac{5}{10} + \dots + \frac{5^{n-1}}{10^{n-1}} + \dots\right) =$$

konv. geometriai sor $q = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
 $\in (-1, 1)$

$$= 5 + \frac{25}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= 5 + \frac{25}{10} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 5 + \frac{25}{10} \cdot 2 = 5 + 5 = \boxed{10}$$

Teljesít az összeadási kritérium feltételét az
adott sor is konvergens és összege legfeljebb 10.

⑥ $x \in \mathbb{R} = ?$ d.h. konv: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{(x^2+x+1)^n}$

konvergenz testen.

Feltrin a gök-kriterium :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n \cdot 3^{n+1}}{(2n+1) \cdot (x^2+x+1)^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{2n+1} \cdot |x^2+x+1|} =$$

$$= \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot (x^2+x+1)}$$

mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{3}) = 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{2n+1}) = 1$, weil; d.h. Korollar:

$$1 \leq \sqrt[n]{2n+1} \leq \sqrt[n]{3n} = \underbrace{\sqrt[n]{3}}_{\rightarrow 1 \text{ (da } n \rightarrow \infty)} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\rightarrow 1 \text{ (da } n \rightarrow \infty)}}_{\rightarrow 1 \text{ (da } n \rightarrow \infty)}$$

über x^2+x+1 polynom diskriminante $D=1-4 < 0$
 es keine nullstellen $\Rightarrow$ $x^2+x+1 > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)
 parabol

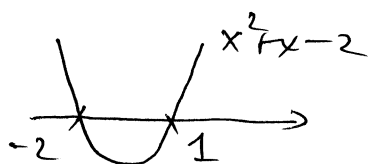
Feltrin a gök-kriterium erklären 1. ko:

$$\frac{3}{x^2+x+1} < 1 \quad | \cdot (x^2+x+1) > 0 \quad (\Rightarrow)$$

$\Leftrightarrow$

$$3 < x^2+x+1 \quad (\Rightarrow) \quad x^2+x-2 > 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$(x-1)(x+2) > 0$$



$$x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$$

- 8 -

a sor abszolút konv $\Rightarrow$ konvergens is.

$$\text{Ha } \frac{3}{x^2+x+1} > 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad x \in (-2, 1) \Rightarrow \text{a sor div.}$$

$$\text{Ha } \frac{3}{x^2+x+1} = 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad x \in \{1, -2\} \Rightarrow$$

$$\text{Ha } \boxed{x=1} \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n \cdot 3^{n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^n} =$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \cdot 3}{2n+1} = 3 \cdot \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2n+1} \right) \stackrel{=: A_n}{=}$$

$$\text{itt } 0 \leq \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1} \quad \text{fogó' monoton} \Rightarrow$$

$$\text{az ep Leibniz sor el' mivel } \lim(A_n) =$$

$$= \lim\left(\frac{1}{2n+1}\right) \neq 0 \Rightarrow \text{konv. Leibniz sor.}$$

$$\text{Ha } \boxed{x=-2} \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n \cdot 3^{n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{(4-2+1)^n} =$$

$$= \sum \frac{(-1)^n \cdot 3}{2n+1} \quad \text{ugyancs.}$$

Teljes a konvergencia halmaza az adott sorhoz:

$$\boxed{x \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty)}$$