

Analízis 1 BSC 2011.03.31

1. zárthelyi, megoldások.

1. feladat. Tekintsük az

$$A = \left\{ \frac{3\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x} + 5} \in \mathbb{R} : x \in [4, +\infty) \right\}$$

halmazt. Korlátos-e A , van-e neki maximuma, minimuma? Mi az A halmaz szuprémuma és infimuma?

Megoldás: A A halmaz elemei a következő alakra hozhatók:

$$\frac{3\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x} + 5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6\sqrt{x} - 2}{6\sqrt{x} + 15} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6\sqrt{x} + 15 - 17}{6\sqrt{x} + 15} = \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \frac{17}{6\sqrt{x} + 15} \right) = \frac{3}{2} - \frac{17}{4\sqrt{x} + 10}$$

A fenti alakból, rögtön leolvasható, hogy ha $x \geq 4$, így $\sqrt{x} \geq 2$ ezért a második tört pozitív, így, a halmaz minden elemére igaz, hogy:

$$\frac{3}{2} - \frac{17}{4\sqrt{x} + 10} < \frac{3}{2} \quad (\forall x \geq 4) \quad (1)$$

vagyis $\frac{3}{2}$ a A -nak egy felső korlátja. Belátjuk, hogy ez egyben a legkisebb felső korlát is. Ehhez elég megmutatnunk, hogy:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : a > \frac{3}{2} - \varepsilon.$$

Rögzítsünk egy pozitív ε -t és keresünk olyan alkalmas $x \geq 4$ valós számot, melyre:

$$\frac{3}{2} - \varepsilon < a = \frac{3}{2} - \frac{17}{4\sqrt{x} + 10} \iff \varepsilon > \frac{17}{4\sqrt{x} + 10} \iff 4\sqrt{x} + 10 > \frac{17}{\varepsilon} \iff$$

$$\sqrt{x} > \frac{17}{4\varepsilon} - \frac{5}{2}$$

Ilyen $x \in [4, +\infty)$ van, például $x := \left(\frac{17}{4\varepsilon}\right)^2 + 4 = \frac{289}{16\varepsilon^2} + 4$. Ezzel beláttuk, hogy $\sup A = \frac{3}{2}$.

A fenti (1) egyenlőtlenség alapján világos, hogy $\frac{3}{2} \notin A$ ezért nincs legnagyobb elem.

Mivel A elemei (1) alakúak, látható, hogy ez akkor a legkisebb, amikor a második tört a legnagyobb, azaz ennek nevezője a legkisebb. Ez pontosan akkor teljesül, ha $x = 4$. Formálisan: $\forall x \in [4, +\infty)$

$$\frac{3}{2} - \frac{17}{4\sqrt{x} + 10} \geq \frac{3}{2} - \frac{17}{4\sqrt{4} + 10} = \frac{5}{9} \in A.$$

Ezzel beláttuk, hogy $\min A = \frac{5}{9}$ és ez egyben a legnagyobb alsó korlát is. Tehát $\inf A = \frac{5}{9}$.

□

2. feladat. Invertálható-e az

$$a) \quad f(x) = |x-3| + |x+5| \quad (x \in \mathbb{R}), \quad b) \quad f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{ha } -1 \leq x \leq 0, \\ 5-3x, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

függvény? Ha igen, akkor adja meg a $D_{f^{-1}}, R_{f^{-1}}$ halmazokat és az f^{-1} függvényt.

Megoldás:

a) Mivel $f(3) = f(-5) = 8$ ezért f nem invertálható.

b) Az invertálhatóság definíciójából kiindulva három esetet fogunk megkülönböztetni:

1. Ha $x_1 \neq x_2 \in [-1, 0]$, akkor

$$f(x_1) - f(x_2) = 2x_1 + 1 - (2x_2 + 1) = 2(x_1 - x_2) \neq 0,$$

azaz, ez az ág invertálható. Ebben az esetben $R_{f|_{[-1,0]}} = f([-1,0]) = [-1,1]$, ugyanis: ha $x \in [-1,0]$, akkor $y = 2x + 1 \in [-1,1]$ és fordítva, ha $y \in [-1,1]$, akkor $\exists x = \frac{y-1}{2} \in [-1,0]$, amelyre $y = f(x)$.

2. Ha $x_1 \neq x_2 \in (0,1]$, akkor

$$f(x_1) - f(x_2) = 5 - 3x_1 - (5 - 3x_2) = 3(x_2 - x_1) \neq 0,$$

azaz, ez az ág is invertálható. Ebben az esetben $R_{f|_{(0,1]}} = f((0,1]) = [2,5)$, mert: ha $x \in (0,1]$, akkor $y = 5 - 3x \in [2,5)$ és fordítva, ha $y \in [2,5)$, akkor $\exists x = \frac{1}{3} \cdot (5 - y) \in (0,1]$, amelyre $y = f(x)$.

3. Ha $x_1 \in [-1,0]$ és $x_2 \in (0,1]$ ilyenkor nyilván $(x_1 \neq x_2)$, akkor $f(x_1) \in [-1,1]$ és $f(x_2) \in [2,5)$. Mivel ezek diszjunkt intervallumok, ezért ilyenkor is invertálható az f .

A három esetet figyelembe véve, kapjuk, hogy f invertálható és:

$$D_{f^{-1}} = R_f = [-1,1] \cup [2,5),$$

illetve

$$R_{f^{-1}} = D_f = [-1,1],$$

továbbá:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (x - 1), & \text{ha } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3} \cdot (5 - x), & \text{ha } 2 \leq x < 5. \end{cases}$$

□

3. feladat. Vizsgálja meg az $\left(\frac{n \cdot (n-1)}{2^{n+1}}\right)$ sorozatot monotonitás, kvázi monotonitás (azaz egy indextől kezdve monoton) és korlátosság szempontjából.

Megoldás: Jelölje (x_n) a fenti sorozatot. Képezzük az egymást követő tagok különbségét:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{(n+1) \cdot n}{2^{n+2}} - \frac{n \cdot (n-1)}{2^{n+1}} = \frac{n \cdot (n+1 - 2n + 2)}{2^{n+2}} = \\ &= \frac{n \cdot (3 - n)}{2^{n+2}} < 0 \iff x_{n+1} < x_n \iff n \geq 4. \end{aligned}$$

Az első öt tagot is figyelembe véve, kapjuk, hogy:

$$x_0 = 0 = x_1 = 0 < x_2 = \frac{1}{4} < x_3 = \frac{3}{8} = x_4 = \frac{3}{8} > x_5 = \frac{5}{16},$$

azaz, a sorozat nem monoton, de a 4. indextől kezdve szigorúan monoton csökken (kvázi monoton fogy). Ebből kapjuk, hogy: $0 < x_{n+1} < x_n \leq x_4 = \frac{3}{8}$, $(\forall 4 \leq n \in \mathbb{N})$. Az első öt tagot is figyelembe véve adódik, hogy:

$$0 \leq x_n \leq \frac{3}{8}, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

vagyis az (x_n) korlátos sorozat. □

4. feladat. A határérték definíciójának felhasználásával határozza meg a következő határértéket:

$$\lim \left(\frac{1 + n - 4n^2}{3n^2 + 5n + 4} \right).$$

Megoldás: Először is, nézzük meg mi lesz a határérték. Mivel a $\frac{\infty}{\infty}$ kritikus eset, ezért emeljük ki a domináns tagokat, a számlálóban is és a nevezőben is n^2 -et, majd egyszerűsítsünk vele:

$$x_n = \frac{-4n^2 + n + 1}{3n^2 + 5n + 4} = \frac{-4 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}} \rightarrow -\frac{4}{3} \quad (n \rightarrow \infty).$$

A definíció szerinti bizonyításhoz rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot és becsüljük a sorozat valamely tagjának eltérését a határértéktől az alábbi módon:

$$\begin{aligned} \left| x_n + \frac{4}{3} \right| &= \left| \frac{-4n^2 + n + 1}{3n^2 + 5n + 4} + \frac{4}{3} \right| = \left| \frac{-12n^2 + 3n + 3 + 12n^2 + 20n + 16}{3(3n^2 + 5n + 4)} \right| = \\ &= \frac{23n + 19}{3(3n^2 + 5n + 4)} \leq \frac{23n + 19n}{3(3n^2 + 5n + 4)} \leq \frac{42n}{9n^2} = \frac{14}{3n} < \varepsilon \end{aligned}$$

A fenti becslések teljesülnek minden olyan $n \in \mathbb{N}$ -re, melyre $n \geq 1$ és $n > \frac{14}{3\varepsilon}$.

Összefoglalva a fentieket:

$$\exists A = -\frac{4}{3}, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 := \left\lceil \frac{14}{3\varepsilon} \right\rceil + 1 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, n \in \mathbb{N} :$$

$$\left| x_n - A \right| = \left| x_n + \frac{4}{3} \right| < \frac{14}{3n} < \frac{14}{3n_0} < \varepsilon$$

tehát a sorozat konvergencia és határértéke $-\frac{4}{3}$. $\square$

5.feladat. Tekintsük a következő sorozatokat:

$$x_n := \frac{3 - 2n^3}{5n - 1}, \text{ és } y_n := \frac{3^n}{2^{2n} + (-1)^n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

a) Léteznek-e a $\lim(x_n)$ illetve $\lim(y_n)$ határértékek? Ha igen számítsa ki őket.

b) Léteznek-e a $\lim(x_n + y_n)$ illetve $\lim(x_n \cdot y_n)$ határértékek? Ha igen számítsa ki őket.

Megoldás:

a) (1) A $\lim(x_n)$ most $\frac{-\infty}{\infty}$ típus, a domináns tagok kiemelésével, kapjuk, hogy:

$$\lim(x_n) = \lim \frac{n^3 \cdot \left(\frac{3}{n^3} - 2 \right)}{n \cdot \left(5 - \frac{1}{n} \right)} = \lim \left(n^2 \cdot \frac{\frac{3}{n^3} - 2}{5 - \frac{1}{n}} \right) = +\infty \cdot \frac{0 - 2}{5 - 0} = -\infty.$$

Itt felhasználva, hogy: $\lim(n^2) = +\infty$, $\lim\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\left(\frac{3}{n^3}\right) = 0$ és a határértékekre vonatkozó műveleti szabályokat (összevonás, szorzás, osztás) adódik $-\infty$.

(2) A $\lim(y_n)$ most $\frac{\infty}{\infty}$ típus, a domináns tagok kiemelésével, kapjuk, hogy:

$$\lim(y_n) = \lim \frac{3^n}{4^n \cdot \left(1 + \left(-\frac{1}{4} \right)^n \right)} = \lim \left(\left(\frac{3}{4} \right)^n \cdot \frac{1}{1 + \left(-\frac{1}{4} \right)^n} \right) = 0 \cdot \frac{1}{1 + 0} = 0.$$

A geometriai sorozatokra tanult tétel értelmében: $\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n = \lim\left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$,

mert ezek geometriai sorozatok, amelyeknek a hányadosai $q = \frac{3}{4}$ illetve $q = -\frac{1}{4}$ a $(-1, 1)$ intervallumba esnek. Felhasználva továbbá a határértékekre vonatkozó műveleti szabályokat (összeadás, szorzás, osztás) kapjuk, hogy $\lim(y_n) = 0$.

b) (1) Mivel a kapott határértékek összege $-\infty + 0$ értelmezhető, ezért

$$\lim(x_n + y_n) = \lim(x_n) + \lim(y_n) = -\infty + 0 = -\infty.$$

(2) A szorzatra vonatkozó tétel most nem használható, mert a $-\infty \cdot 0$ szorzat nem értelmezhető, ezért tekintsük a következő alakot:

$$\begin{aligned} \lim(x_n \cdot y_n) &= \lim \left(n^2 \cdot \frac{\frac{3}{n^3} - 2}{5 - \frac{1}{n}} \right) \cdot \left(\left(\frac{3}{4} \right)^n \cdot \frac{1}{1 + \left(-\frac{1}{4} \right)^n} \right) = \\ &= \lim \left(n^2 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^n \right) \cdot \frac{\frac{3}{n^3} - 2}{5 - \frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{1 + \left(-\frac{1}{4} \right)^n} = 0 \cdot \frac{0 - 2}{5 - 0} \cdot \frac{1}{1 + 0} = 0. \end{aligned}$$

Itt felhasználtuk, hogy $\lim(n^k \cdot q^n) = 0$, ha $k \in \mathbb{N}$ és $q \in (-1, 1)$ tetszőleges.

Most $k = 2$ és $q = \frac{3}{4}$. Tehát $\exists \lim(x_n \cdot y_n) = 0$.