

1. Bizonyítsa be, hogy minden $1 \leq n, m \in \mathbb{N}$ természetes számok esetén :

$$n + m \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n} \leq 1 + \frac{n^2 + m^2}{n \cdot m \cdot (n + m)}.$$

2. Adott az $A := \left\{ \frac{5^{n+1} + 1}{2 \cdot 5^n + 3} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ halmaz. Korlátos-e? Számítsuk ki $\sup A$, $\inf A$, $\min A$, $\max A$ -t ha léteznek.

3. Határozza meg az $f \circ g$ összetett függvényt, ha $f(x) := \begin{cases} x + 1 & , \text{ ha } x \geq 0 \\ -2x & , \text{ ha } x < 0 \end{cases}$ és $g(x) := \begin{cases} -x + 1 & , \text{ ha } x \geq 0 \\ -1, & \text{ ha } x < 0 \end{cases}$.

4. A definíció alapján határozza meg a : $\lim \left(\frac{5n^2 - \sqrt{n} + 2}{n^2 + \sqrt{n} + 1} \right)$ határértéket.

5. Adottak az $x_n := (\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}})$ és $y_n := \left(\frac{2^n + n!}{3^{n+1} + (n+1)!} \right)$, $(n \in \mathbb{N})$ sorozatok.

i) Határozza meg a $\lim(x_n)$, $\lim(y_n)$ határértékeket.

ii) Mit tud mondani a $\lim(x_n + y_n)$ illetve $\lim \left(\frac{x_n}{y_n} \right)$ határértékekről?