

1. Bizonyítsa be, hogy minden $a, b, c \geq 0$ valós szám esetén : $(1 + a + a^2) \cdot (1 + b + b^2) \cdot (1 + c + c^2) \geq 27abc$.

2. Adott az $A := \left\{ \frac{\sqrt{n-2}+5}{2 \cdot \sqrt{n-2}+3} \in \mathbb{R} \mid 6 \leq n \in \mathbb{N} \right\}$ halmaz. Korlátos-e? Számítsuk ki $\sup A$, $\inf A$, $\min A$, $\max A$ -t ha léteznek.

3. Milyen $a \in \mathbf{R}$ esetén lesz az $f(x) := \begin{cases} a - x + 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ 1 + (x - 2)^2 & (1 < x \leq 2) \end{cases}$ függvény invertálható?

Mi lesz ekkor $\mathcal{D}_{f^{-1}}$, $\mathcal{R}_{f^{-1}}$, ill. $f^{-1}(x)$ ($x \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$)?

4. A definíció alapján határozzuk meg a

$$\lim \left(\frac{1 - 2n^2 - n}{3n^2 + n + 1} \right)$$

határértéket.

5. Adottak az $x_n := (\sqrt{n^2 + n + 1} - n)$ és $y_n := \left(\frac{2^{n+1} - 3^n}{n + 3^{n+1}} \right)$, ($n \in \mathbb{N}$) sorozatok.

i) Határozza meg a $\lim(x_n)$, $\lim(y_n)$ határértékeket.

ii) Mit tud mondani a $\lim \left(\frac{2 \cdot x_n + 1}{3 \cdot y_n + 1} \right)$ határértékről?