

① Bizonyítsa be, hogy $\forall 1 \leq n, m \in \mathbb{N}$ teljesül:

$$\sqrt[n+m]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m \cdot \left(1+\frac{1}{m}\right)^n} \leq 1 + \frac{n^2 + m^2}{n \cdot m \cdot (n+m)}$$

Meg: Alkalmazzuk a számtani - aritmetikai középérték másodfokú
 egyenlőtlenségét a győk alatt lévő $n+m$ db pozitív
 száma: m db $1+\frac{1}{n} > 0$ és n db $1+\frac{1}{m} > 0$
 száma; ossz. $S_2 - M_2$

$$\sqrt[n+m]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m \cdot \left(1+\frac{1}{m}\right)^n} \leq \left(\frac{m \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) + n \cdot \left(1+\frac{1}{m}\right)}{n+m} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n+m]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m \cdot \left(1+\frac{1}{m}\right)^n} \leq \frac{m + \frac{m}{n} + n + \frac{n}{m}}{n+m} =$$

$$= 1 + \frac{\frac{n}{m} + \frac{m}{n}}{n+m} = 1 + \frac{n^2 + m^2}{n \cdot m \cdot (n+m)}$$

② $A := \left\{ \frac{5 \cdot 5^n + 1}{2 \cdot 5^n + 3} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ $\sup A, \inf A,$
 $\min A, \max A = ?$

Meg: A halmaz elemeit abszolútba, kőpőd, kőpő:

$$\frac{5 \cdot 5^n + 1}{2 \cdot 5^n + 3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{10 \cdot 5^n + 2}{5^n \cdot 10 + 15} = \frac{5}{2} \cdot \frac{10 \cdot 5^n + 15 - 13}{10 \cdot 5^n + 15} =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \left[1 - \frac{13}{10 \cdot 5^n + 15} \right] = \frac{5}{2} - \frac{13}{4 \cdot 5^n + 6} \quad \dots (1)$$