

Lineáris algebra (A, B, C)

9. előadás

(vázlat)

Most az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rendszerbeli koordinátáikkal felírt geometriai vektorok skaláris szorzatára ismert kifejezést (5/4) szeretnénk általánosítani először $\mathbb{R}^n$ esetére: $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{x}$ természetes általánosítás, legfeljebb a rövid jelölés kínos: $\mathbf{x}\mathbf{y}$ nem alkalmas, mert ezek így össze nem szorozható mátrixok; a transzponálás jelét cipelni nem volna nagy fáradság, de akkor hogy általánosítsunk? Az általánosításra is alkalmas $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ jelölést választjuk [megjegyezzük, hogy gyakori az $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jelölés is]. Ekkor a $\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ a hosszúság természetes általánosítása. $\mathbb{C}^n$ esetén azonban már bajban lennénk, ha a szokásos műveleti tulajdonságokat is meg szeretnénk tartani, és a hosszúságot is általánosítani akarjuk. Ezen úgy segíthetünk, hogy a kommutativitást részben feláldozzuk, s a műveleti tulajdonságoknál is megbékélünk olyasfélékkel, amelyek az adjungálásra vonatkozó 5/2 oldali tétel második állítására hasonlítanak. Így $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ esetén egy természetes általánosítás: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^* \mathbf{x}$. Ezt próbáljuk most még tovább általánosítani, amikor V vektortér egy számtest felett, de megelégszünk azzal a két esettel, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ illetve $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Mindent az utóbbinak megfelelően írunk, a valós esetben persze felesleges a konjugálás.

DEFINÍCIÓ: Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, továbbá V vektortér a $\mathbb{K}$ felett (az 1/3 oldali 10 tulajdonság megfelelőjével). Azt mondjuk, hogy a V (valós vagy komplex) euklideszi tér, ha adott benne egy skaláris szorzatnak nevezett $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ függvény, melyre a következők teljesülnek minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén:

- 1./ $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$;
- 2./ $\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$;
- 3./ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$;
- 4.a/ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ mindig (valós és) nemnegatív;
- 4.b/ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

A definícióban a 3./ követelmény az egyik disztributivitás volt, 1./ felhasználásával adódik belőle a másik disztributivitás is:

$$3'./ \langle \mathbf{y} + \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle} = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle} = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} + \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle.$$

A 2./ követelmény megfelelőjével vigyázni kell:

$$2'./ \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} = \overline{\lambda \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} = \overline{\lambda} \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle} = \overline{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

Az 1./ követelményből adódik, hogy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$, tehát $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R}$, ezért volt 4.a/-ban csak zárójelben a nemnegativitás követelménye előtt [vigyázat: a $\mathbb{C}$ -t nem lehet úgy rendezni, mint az $\mathbb{R}$ -et].

A bevezetőben említett példákat most még kiegészítjük: a következő példa azt mutatja, hogy ugyanazt a vektorteret többféleképpen lehet euklideszivé tenni. Legyen $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ egy n rangú mátrix, s legyen $A = B^* B$. Ekkor $V = \mathbb{C}^n$ -re az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^* A \mathbf{x}$ teljesíti az összes fenti követelményt. Ugyanez igaz persze akkor is, ha itt $\mathbb{C}$ helyébe mindenütt $\mathbb{R}$ -et írunk. Tanulság: amikor egy V valós vagy komplex euklideszi térről beszélünk, akkor egy V vektorterről van szó $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ felett egy **rögzített** skaláris szorzattal, mely teljesíti az 1./, 2./, 3./, 4.a/ és 4.b/ követelményeket. Egy vadabb kinézetű példa: $V = \mathbb{C}^{n \times n}$ és $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(B^* A)$.

DEFINÍCIÓ: Legyen V valós vagy komplex euklideszi tér. $\mathbf{x} \in V$ esetén az $\mathbf{x}$ (euklideszi) normája: $\|\mathbf{x}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$.

Vizsgáljuk most a norma tulajdonságait, tényleg olyan-e, mint a geometriai vektoroknál az abszolút érték? Legyen tehát $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

A 4.a/,b/-ből adódik, hogy $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, továbbá $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$. A 2./ és a 2'./ adja, hogy $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$.

Használhatóság szempontjából lényeges kérdés, hogy a háromszögegyenlőtlenség vajon teljesül-e: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \stackrel{?}{\leq} \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Ezt most óvatosan csak átfogalmazzuk:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| &\iff \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \iff \\ \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle &\leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \iff \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle &\leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \iff \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle &\leq 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \iff \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} \leq 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \iff \\ 2 \cdot \operatorname{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &\leq 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \iff \operatorname{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|. \end{aligned}$$

Bizonyítani még nem sikerült, viszont a bal oldalak mellékesen kiadják, hogy $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \iff \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$, ami a Pitagorasz-tétel általánosítása, ha a merőlegességet a skaláris szorzat nulla voltával definiáljuk.

A háromszögegyenlőtlenség úgy nyer majd bizonyítást, hogy nála erősebb tételt igazolunk:

CAUCHY-EGYENLŐTLENSÉG: Legyen V valós vagy komplex euklideszi tér. Ekkor tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ -re $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$. Itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ lineárisan összefüggő.

Bizonyítás: I.: $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ Ö esetén valamelyik a másiknak számszorosa, pl. $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$. Ekkor $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| = |\langle \lambda\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle| = |\lambda\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$.

II.: $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ L esetén biztos, hogy $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, és tetszőleges $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $\lambda\mathbf{x} + \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Tehát 4.a/ és 4.b/ szerint

$$\begin{aligned} 0 < \langle \lambda\mathbf{x} + \mathbf{y}, \lambda\mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle &= \langle \lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x} \rangle + \langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \lambda\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\lambda\mathbf{x}\|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}\{\langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\} + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= |\lambda|^2 \|\mathbf{x}\|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}\{\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\} + \|\mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Mivel a szorzat valós részét nem tudjuk kényelmesen számolni, a paraméter választásával biztosítjuk, hogy valós legyen a szorzat, de még maradjon szabad választásunk is. Legyen tehát $\lambda = \alpha \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$ alakú, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\begin{aligned} 0 < \alpha^2 |\overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}|^2 \|\mathbf{x}\|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}\{\alpha \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\} + \|\mathbf{y}\|^2 &= \\ \alpha^2 |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \|\mathbf{x}\|^2 + 2\alpha |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 + \|\mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenséget megszorozva $\|\mathbf{x}\|^2 > 0$ -val, azt kapjuk, hogy

$$0 < |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \{\alpha^2 \|\mathbf{x}\|^4 + 2\alpha \|\mathbf{x}\|^2\} + \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2,$$

azaz

$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 < |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \{(\alpha \|\mathbf{x}\|^2 + 1)^2\} + \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2$. Végül az $\alpha = -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2}$ adja a kívánt egyenlőtlenséget. Ezután már definiálhatunk távolságot euklideszi térben: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Valós euklideszi térben $\mathbf{0}$ -tól különböző vektorok $[0, \pi]$ -beli hajlásszögét a geometriai vektoros definíció kifordításával nyerhetjük: $\cos \gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}$. Ennek értelmességét a Cauchy-egyenlőtlenség biztosítja. Komplex euklideszi térre csak a merőlegességet (ortogonalitást) definiáljuk a már említett módon: $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, ha $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Így már tudjuk valamennyire általánosítani a geometriai vektoroknál hasznos $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rendszert:

DEFINÍCIÓ: Legyen V n -dimenziós (valós vagy komplex) euklideszi tér, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ B V -ben. Az $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ ortogonális bázis (OB) V -ben, ha (bázis és) elemei páronként ortogonálisak. Az $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ ortonormált bázis (ONB) V -ben, ha elemei páronként ortogonálisak és normájuk 1.

TÉTEL: $n > 0$ -ra tetszőleges n -dimenziós euklideszi térben létezik ortonormált bázis.

Bizonyítás: Először jegyezzük meg, hogy elég egy OB megadása: Ha $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ OB V -ben, akkor

$$\frac{\mathbf{f}_1}{\|\mathbf{f}_1\|}, \dots, \frac{\mathbf{f}_n}{\|\mathbf{f}_n\|}$$

ONB V -ben. Egy $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ OB keresése a Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással történhet. Legyen $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ bázis V -ben, ezt fogjuk „ortogonalizálni”: Legyen $\mathbf{e}_1 = \mathbf{b}_1$. [Ha $\mathbf{b}_2$ merőleges $\mathbf{b}_1$ -re, akkor persze folytathatjuk ugyanígy, de ha nem, akkor $\mathbf{b}_2$ -t $\mathbf{e}_1$ alkalmas számszorosának hozzáadásával próbáljuk módosítani.] Tegyük fel, hogy már adott $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i$ úgy, hogy páronként ortogonálisak és $\text{Span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i) = \text{Span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_i)$ (és $i < n$). Ekkor keressük $\mathbf{e}_{i+1}$ -et a következő alakban:

$$\mathbf{e}_{i+1} = \mathbf{b}_{i+1} + \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_i \mathbf{e}_i.$$

Az együtthatókat [melyeknek igazából egy $i + 1$ felső index is kellene] úgy próbáljuk meghatározni, hogy $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i+1}$ páronként ortogonálisak legyenek, továbbá teljesüljön $\text{Span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i+1}) = \text{Span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{i+1})$ is. Utóbbi ($\subseteq$ és $\supseteq$) egyszerű számolással adódik, a merőlegességet illetően pedig csak azt kell biztosítanunk, hogy az új $\mathbf{e}_{i+1}$ ortogonális legyen a korábbi $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i$ -re. Legyen tehát $1 \leq j \leq i$. Ekkor

$$\langle \mathbf{e}_{i+1}, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{b}_{i+1} + \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_i \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{b}_{i+1}, \mathbf{e}_j \rangle + \langle \lambda_1 \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_j \rangle + \dots + \langle \lambda_i \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle =$$

$$\langle \mathbf{b}_{i+1}, \mathbf{e}_j \rangle + \lambda_1 \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_j \rangle + \dots + \lambda_i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{b}_{i+1}, \mathbf{e}_j \rangle + \lambda_j \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle.$$

$\text{Span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i) = \text{Span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_i)$ miatt $\text{Span}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i)$ dimenziója i , így $\mathbf{e}_j \neq \mathbf{0}$. Értelmes tehát a

$$\lambda_j = -\frac{\langle \mathbf{b}_{i+1}, \mathbf{e}_j \rangle}{\langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \rangle}$$

választás, és biztosítja a kívánt merőlegességeket.

A továbbiakhoz rögzítsük $\mathbb{R}^n$ -et, és rajta az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \mathbf{y}^\top \mathbf{x}$ skaláris szorzatot! Bizonyítás nélkül mondjuk ki a következő nevezetes tételt:

TÉTEL (a valós szimmetrikus mátrixok spektráltétele): $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén A szimmetrikus $\iff \exists$ SONB $\mathbb{R}^n$ -ben és A minden sajátértéke valós.

DEFINÍCIÓ: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $A^\top = A$ esetén az A -hoz tartozó Q **kvadratikus alak** (vagy kvadratikus forma): $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; \quad Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x}$.

Ez $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ esetén úgy is írható, hogy

$$\sum_{j=1}^n x_j \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} x_j x_k.$$

Pl. $n = 2$ esetén ez így néz ki (magyarázván az elnevezést): $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$.

A spektráltétel biztosítja, hogy létezik SONB, azaz olyan $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ ONB $\mathbb{R}^n$ -ben, melyre $A\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k$ és $\lambda_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, \dots, n$). Az $\mathbf{x}$ -et ebben az ONB-ben érdemes felírni:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{u}_k \text{-ra} \quad A\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n \alpha_k A\mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k \mathbf{u}_k; \quad Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A \mathbf{x} =$$

$$\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j, \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k \mathbf{u}_k \right\rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \lambda_k \alpha_k \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k \alpha_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k^2.$$

Ebből az ún. négyzetösszegre való redukcióból (hívják főtengetytételnek is) megállapíthatjuk, hogy hogyan függ a kvadratikusság értéke az előjele a sajátértékek előjelviszonyaitól. Mivel $Q(\mathbf{0}) = 0$, ezért $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ az érdekes. Az eredményeket az alábbi táblázatba foglalhatjuk a szokásos elnevezésekkel együtt:

	$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ -ra	elnevezés
$\forall \lambda_k > 0$:	$Q(\mathbf{x}) > 0$	Q pozitív definit
$\forall \lambda_k < 0$:	$Q(\mathbf{x}) < 0$	Q negatív definit
$\forall \lambda_k \geq 0$:	$Q(\mathbf{x}) \geq 0$	Q pozitív szemidefinit
$\forall \lambda_k \leq 0$:	$Q(\mathbf{x}) \leq 0$	Q negatív szemidefinit
$\exists \lambda_j > 0$ és $\exists \lambda_k < 0$:	$Q(\mathbf{u}_j) > 0, Q(\mathbf{u}_k) < 0$	Q indefinit

Annak eldöntése, hogy Q milyen definit, elvileg lehetséges a sajátértékek kiszámítása nélkül is az A négyzetes részmátrixai determinánsai segítségével. A pozitív (ill. negatív) definit esetben ezt könnyű megfogalmazni a bal felső sarokaldeterminánsok segítségével egy tételben (bizonyítás nélkül):

TÉTEL: Legyen az $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = A^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **karakterisztikus sorozata:**

$$\Delta_0 = 1; \quad \Delta_1 = a_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \dots; \quad \Delta_n = |A|.$$

Az A -hoz tartozó Q pozitív definit $\iff \forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$ -re $\Delta_j > 0$.

Az A -hoz tartozó Q negatív definit $\iff \forall j \in \{0, 1, \dots, [n/2]\}$ -re $\Delta_{2j} > 0$ és $\forall j \in \{0, 1, \dots, [(n-1)/2]\}$ -re $\Delta_{2j+1} < 0$.

Az első esetben azt mondják, hogy a karakterisztikus sorozat jeltartó, a másodikban pedig azt, hogy a karakterisztikus sorozat jelváltó (a Δ_0 -t ne felejtjük ki!).