

Lineáris algebra (A, B, C)

7. előadás

(vázlat)

Most már lehetőségünk van arra, hogy egy determináns értékét elemi bázistranszformáció segítségével számoljuk ki.

Ha $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olyan, hogy $\varrho(A) < n$, akkor az oszlopvektorrendszer $\mathbf{0}$, tehát $\exists \mathbf{a}_j$, ami lineárisan függ a többitől, pl. $\mathbf{a}_j = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_{j-1} \mathbf{a}_{j-1} + \alpha_{j+1} \mathbf{a}_{j+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_n$. Ekkor a j -edik oszlophoz hozzáadhatjuk $k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ -re a k -adik oszlop $-\alpha_k$ -szorosát, így a determináns nem változik, viszont a j -edik oszlopba csupa 0 kerül, tehát $\varrho(A) < n$ esetén $|A| = 0$. $\varrho(A) = n$ esetén mindent be tudunk vinni a bázisba, de nem biztos, hogy az eredeti sorrendben. Másrészt most célszerű kiírunk a bevitt vektorok koordinátáit is, mert így nem rontjuk el az $n \times n$ -es alakot, és egy általános elemi bázistranszformációs lépésnél összehasonlíthatjuk a régi (lépés előtti) mátrix és az új (lépés utáni) mátrix determinánsát, mégpedig úgy, hogy közbeiktatunk egy segédmátrixot. Az indexelési nehézségek miatt sem az $\mathbf{a}$, sem az $\mathbf{e}$ vektorokat nem írjuk ki, csupán a koordinátákból adódó mátrixot. Legyen a régi mátrix

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1j} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1} & \dots & \beta_{ij} & \dots & \beta_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nj} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix}, \text{ és tegyük fel, hogy éppen az } \mathbf{a}_j\text{-t visszük be az } \mathbf{e}_i \text{ helyére,}$$

feltéve természetesen, hogy $\beta_{ij} \neq 0$. Ezt a nullától különböző β_{ij} -t szokás a lépés generáló elemének hívni, s ha éppen a k -adik lépésről van szó, g_k -val is jelölni.

Képezzünk egy segédmátrixot úgy, hogy a régi mátrix i -edik sorát megszorozzuk a β_{ij}^{-1} számmal:

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1j} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1}/\beta_{ij} & \dots & 1 & \dots & \beta_{in}/\beta_{ij} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nj} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix},$$

tehát a régi mátrix determinánsa a segédmátrix determinánsának β_{ij} -szerese.

Ezután a segédmátrix i -edik sorának j -edik helyén álló 1 segítségével kinullázhatjuk a j -edik oszlop többi elemét, mégpedig determinánstartó átalakításokkal: minden $k \neq i$ -re adjuk hozzá a k -adik sorhoz az i -edik sor $-\beta_{kj}$ -szeresét. Ekkor épp az új mátrixot kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} - \beta_{1j} \cdot \beta_{i1}/\beta_{ij} & \dots & 0 & \dots & \beta_{1n} - \beta_{1j} \cdot \beta_{in}/\beta_{ij} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1}/\beta_{ij} & \dots & 1 & \dots & \beta_{in}/\beta_{ij} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} - \beta_{nj} \cdot \beta_{i1}/\beta_{ij} & \dots & 0 & \dots & \beta_{nn} - \beta_{nj} \cdot \beta_{in}/\beta_{ij} \end{bmatrix}.$$

Mivel az új mátrixot a segédmátrixból már determinánstartó átalakításokkal nyertük, ezek determinánsa megegyezik, tehát a régi mátrix determinánsa az új mátrix determinánsának is β_{ij} -szerese, azaz g_k -szorosa. $\varrho(A) = n$ esetén n lépést végzünk, az A

determinánsa $g_1 g_2 \cdot \dots \cdot g_n$ -szerese az n -edik lépés utáni új mátrix $|\hat{U}|$ determinánsának. Ha az $\mathbf{a}$ -kat az eredeti sorrendben sikerült bevenni a bázisba, akkor ez az utolsó új mátrix I_n . Egyébként, ha a bevitt elemek sorrendje a bázisban, mondjuk $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_n}$ (itt az $i_1, i_2, \dots, i_n$ az $1, 2, \dots, n$ egy permutációja), akkor cseréket kell végeznünk, amíg az eredeti sorrendbe nem kerülnek. Tekintsük a $(-1)^{I(i_1, \dots, i_n)} |\hat{U}|$ szorzatot. Ha most felcserélünk két báziselemet, akkor az inverziószám páratlan számmal változik, s a szorzat első tényezője (-1) -szeresére változik, de a második tényező is így változik a sorcsere miatt, végeredményben a szorzat nem változik; mikor pedig már eljutottunk az eredeti sorrendhez, akkor $(-1)^{I(1, \dots, n)} |I_n| = (-1)^0 1 = 1$ adódik. Tehát $|\hat{U}| = (-1)^{I(i_1, \dots, i_n)}$,

$$|A| = g_1 g_2 \cdot \dots \cdot g_n \cdot (-1)^{I(i_1, \dots, i_n)}.$$

KÖVETKEZMÉNY: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén

$$|A| \neq 0 \iff \varrho(A) = n \iff \exists A^{-1}.$$

Az utolsó sorában majdnem végig 0 mátrix determinánsára vonatkozó tételt könnyű általánosítani arra az esetre, amikor az utolsó sor helyett az i -edik sorról van szó, és benne az egyetlen nullától különböző elem a j -edik helyen áll. $n \geq 2$ esetén az i -edik sort $n - i$ cserével alulra vihetjük, majd a j -edik oszlopot $n - j$ cserével az utolsó helyre vihetjük. (Az alábbi blokkok közül a $*$ olyanokat jelöl, amelyek 1 oszlopból állnak és tartalmuk közömbös az eredmény szempontjából.)

$$\begin{vmatrix} E & * & F \\ 0 & \dots & 0 & a_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ G & * & H \end{vmatrix} = (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} E & * & F \\ G & * & H \\ 0 & \dots & 0 & a_{ij} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{n-i} (-1)^{n-j} \begin{vmatrix} E & F & * \\ G & H & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & a_{ij} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} E & F \\ G & H \end{vmatrix} = a_{ij} (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} E & F \\ G & H \end{vmatrix}.$$

Az E, F, G, H blokkok (már aminek jut hely) téglalap alakúak, de a végén egymáshoz csúsznak, és egy $(n - 1) \times (n - 1)$ -es mátrixot alkotnak.

Tekintsük **tetszőleges** mátrixra is a megfelelő összezsúszott rész determinánsát az i -edik sor és a j -edik oszlop elhagyásával keletkező mátrix determinánsaként: Az

$$A = \begin{bmatrix} E & * & F \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ G & * & H \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mátrix i -edik sora j -edik eleméhez tartozó aldeterminánsa

$$\text{aldet}_{ij}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} E & F \\ G & H \end{vmatrix},$$

az i -edik sora j -edik eleméhez tartozó **előjelezett** aldeterminánsa pedig

$$A_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{i+j} \text{aldet}_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} E & F \\ G & H \end{vmatrix}.$$

Ha a mátrix elemeinek helyére beírjuk a helynek megfelelő $(-1)^{i+j}$ -t, az ún. sakktábla-szabályt kapjuk, a főátlóban mindenütt $+1$ -gyel. Fentiek segítségével tetszőleges $n \times n$ -es ($n \geq 2$) valós elemű mátrix determinánsát visszavezethetjük n darab $(n - 1) \times (n - 1)$ -es mátrix determinánsának kiszámítására. Választunk egy i -t az $\{1, 2, \dots, n\}$ -ből, s ezt rögzítjük.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\
\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + 0 + \dots + 0 & \dots & 0 + \dots + a_{ij} + \dots + 0 & \dots & 0 + \dots + 0 + a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\
\sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n |B_j| = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \text{aldet}_{ij}(B_j) = \\
\sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \text{aldet}_{ij}(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij},$$

mivel a B_j mátrixok és az A mátrix csak az i -edik sorban különböznek, azt pedig a fenti aldeterminánsok képzése során elhagyjuk. A végeredmény $|A|$ kifejtése az i -edik sor szerint, hasonlóan bizonyítható a j -edik oszlop szerinti kifejtés:

KIFEJTÉSI TÉTEL: $n \geq 2$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén

a) Tetszőleges $1 \leq i \leq n$ esetén

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij};$$

b) Tetszőleges $1 \leq j \leq n$ esetén

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

Bizonyítás nélkül mondjuk ki a következő nevezetes tételt ($\det(A) \stackrel{\text{def}}{=} |A|$).

CRAMER-SZABÁLY: $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $|A| \neq 0$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\exists! \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, melyre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, továbbá az $\mathbf{x}$ j -edik komponense ($j = 1, \dots, n$)

$$x_j = \frac{\det([\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{a}_n])}{\det([\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n])}.$$

Konstrukciókban jól lehet használni olyan négyzetes mátrixokat, melyekről könnyű kideríteni, hogy determinánsuk különbözik-e nullától.

TÉTEL (Vandermonde-determináns és kifejtése): $n \geq 2$; $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ esetén

$$V_n(a_1, \dots, a_n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (a_i - a_j).$$

[Bizonyítás: n szerinti teljes indukció: $n = 2$ -re az állítás nyilvánvaló. $n \geq 3$ esetén $V_n(a_1, \dots, a_n)$ definíció szerinti alakjában adjuk hozzá rendre az n -edik, $(n-1)$ -edik, ..., második oszlophoz az előző oszlop $-a_1$ -szeresét:

$$\begin{aligned}
 V_n(a_1, \dots, a_n) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (a_2 - a_1)1 & (a_2 - a_1)a_2 & \dots & (a_2 - a_1)a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (a_n - a_1)1 & (a_n - a_1)a_n & \dots & (a_n - a_1)a_n^{n-2} \end{vmatrix}_n = \\
 &= \begin{vmatrix} (a_2 - a_1)1 & (a_2 - a_1)a_2 & \dots & (a_2 - a_1)a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_n - a_1)1 & (a_n - a_1)a_n & \dots & (a_n - a_1)a_n^{n-2} \end{vmatrix}_{n-1} = \\
 &= (a_2 - a_1) \cdot \dots \cdot (a_n - a_1) V_{n-1}(a_2, \dots, a_n) = \\
 &= (a_2 - a_1) \cdot \dots \cdot (a_n - a_1) \prod_{n \geq i > j \geq 2} (a_i - a_j) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (a_i - a_j).]
 \end{aligned}$$

Tudjuk már, hogy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén $|A| \neq 0 \iff \rho(A) = n \iff \exists A^{-1}$.

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ esetén is tudunk kapcsolatot a rang és a négyzetes részmátrixok determinánsa között. ($j \times k$ -as **részmátrix**: j sor és k oszlop kiválasztásával a metszéspontokba kerülő elemek alkotta $j \times k$ -as mátrix.)

TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $\rho(A) = r \geq 1$ esetén A -nak van olyan $r \times r$ -es részmátrixa, melynek determinánsa $\neq 0$, viszont minden $(r+1) \times (r+1)$ -es részmátrix determinánsa 0.

[Biz: Mivel a rang r , van r darab oszlop, mely L. Csak ezeket tartva meg, a keletkezett $n \times r$ -es mátrix oszloprangja r , így sorrangja is r , van tehát benne r darab sor, mely L. Csak ezeket tartva meg, a keletkezett $r \times r$ -es mátrix rangja r , így determinánsa $\neq 0$. Tekintsünk most egy $(r+1) \times (r+1)$ -es részmátrixot. Ez $r+1$ oszlopból származik, mely $\ddot{O}$ (hisz a rang r), így részmátrixunk $r+1$ oszlopa is $\ddot{O}$, és részmátrixunk determinánsa 0.]

Az elsőként idézett tételt érdemes még átfogalmazni lineáris egyenletrendszerekre, és pedig a homogén esetre (amikor $\mathbf{b} = \mathbf{0}$), mivel nagy szükségünk lesz később nemtriviális ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) megoldásra, ha van ilyen.

TÉTEL: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van nemtriviális megoldása, ha $|A| = 0$.

[Biz: Nemtriviális megoldás létezése azzal ekvivalens, hogy az A oszlopvektorrendszere lineárisan összefüggő.]

A következő váratlan tételre bizonyítási lehetőségeket vázolunk röviden.

SZORZÁSTÉTEL: $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow |AB| = |A||B|$.

[Az utolsó sorában majdnem végig 0 négyzetes mátrix determinánására vonatkozó tételt a következőképpen is lehetne általánosítani (a $*$ most olyan téglalap alakú blokkot jelöl, melynek tartalma közömbös az eredmény szempontjából): Legyen $C \in \mathbb{R}^{r \times r}$ és $D \in \mathbb{R}^{s \times s}$. Ekkor $\begin{vmatrix} C & * \\ \mathbf{0} & D \end{vmatrix} = |C||D|$ és $\begin{vmatrix} C & \mathbf{0} \\ * & D \end{vmatrix} = |C||D|$. Így $|A||B| = \begin{vmatrix} A & \mathbf{0} \\ -I_n & B \end{vmatrix}$. Most a $-I_n$ elemeit használva determinánstartó átalakításokkal kiírhatjuk B -t, azaz nullmátrix kerül a helyére azon az áron, hogy a felette lévő nullmátrix megváltozik, és pedig épp AB kerül az $\ddot{O}$ helyére. Viszont sorcserék révén $\begin{vmatrix} A & AB \\ -I_n & \mathbf{0} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} -I_n & \mathbf{0} \\ A & AB \end{vmatrix} = |AB|.]$