

Lineáris algebra (A, B, C)

3. előadás

(vázlat)

A következőkben a k, m, n indexek pozitív egészek; ha ettől eltérnénk, azt külön jelezzük.
KICSERÉLÉSI TÉTEL: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$; $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ V -beli L ; $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m$ G V -ben, akkor
 $\alpha) \quad \exists j \in \{1, \dots, m\} : \mathbf{b}_j, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in L \quad \beta) \quad k \leq m$ (azaz $|L| \leq |G|$).

[Bizonyítás: α): A $k = 1$ eset triviális ($\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$ miatt $V \neq \{\mathbf{0}\}$). $k \geq 2$ esetén pedig tegyük fel, hogy minden j rossz, azaz $\forall j \in \{1, \dots, m\} \mathbf{b}_j, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \notin L$. Itt az $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in L$ (hisz $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in L$), tehát $\mathbf{b}_j$ lineárisan függ $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ -től $j = 1, \dots, m$ -re. De így $\mathbf{a}_1$ is lineárisan függ $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ -től, hisz a generátorrendszerrel kifejezhető. Így ellentmondás adódott $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in L$ -lel. β): Az α rész nemcsak az L első elemére érvényes, egymás után alkalmazva (a G mindig ugyanaz, az L pedig az előző eredmény), adódik

$(\mathbf{b}_j =) \mathbf{b}_{j_1}, \mathbf{b}_{j_2}, \dots, \mathbf{b}_{j_k} \in L$. Az L miatt ez k darab **különböző** elem a G -ből, így $m \geq k$.]

Következményként kapjuk a báziselemszámok összehasonlítását:

TÉTEL: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$; B_1, B_2 bázisok V -ben, k pozitív egész, $|B_1| = k$, akkor B_2 is véges és $|B_2| = k$.

[Bizonyítás: Ha B_2 végtelen volna, akkor volna benne $k+1$ elemű részrendszer, másrészt ez L , $k+1 = |L| \leq |B_1| = k$ pedig ellentmondás. A kicserélési tétel β részét $L: B_1, G: B_2$ szereposztással alkalmazva $|B_1| \leq |B_2|$ adódik, majd felcserélt szerepekkel a fordított egyenlőtlenséget kapjuk.]

Most már rendbe tehetjük a 2. előadás végén szereplő gondolatmenetet is: Az $\mathbb{R}^n$ -ben ismerünk n elemű generátorrendszert, így $V = \mathbb{R}^n$ esetére a kicserélési tétel β részét alkalmazva kiderül, hogy egy $\mathbb{R}^n$ -beli lineárisan független rendszernek legfeljebb n eleme lehet, így $\mathbb{R}^n$ bármely alterében is igaz, hogy $|L| \leq n$. $V = \{\mathbf{0}\}$ esetén $\mathbf{0}$ véges generátorrendszer V -ben. Ha $V \leq \mathbb{R}^n$ és $V \neq \{\mathbf{0}\}$, akkor van olyan $\mathbf{a} \in V$, hogy $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Így az $\mathbf{a}$ vektorrendszer L , van tehát L V -ben, s tudjuk, hogy minden L elemszáma legfeljebb n , létezik tehát **maximális** elemszámú lineárisan független rendszer V -ben, pl. $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in L$. Így bármely $\mathbf{b} \in V$ esetén $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b} \notin L$ lesz, hisz a maximális k -nál több elemű. Végül a 2/3 oldali tétel szerint $\mathbf{b}$ lineárisan függ az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ -től. Ezek szerint $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ nemcsak L , hanem G is. Ugyanezt az ötletet akkor is alkalmazhatjuk, amikor előre adott V -ben egy L , hisz az ezt tartalmazó lineárisan független rendszerek között is létezik maximális elemszámú, s most erről derül ki, hogy G is, tehát B . Összefoglalva:

TÉTEL: $V \leq \mathbb{R}^n$ esetén V -ben létezik véges generátorrendszer, továbbá V -ben bármely lineárisan független rendszer kiegészíthető V bázisává.

DEFINÍCIÓ: $V \leq \mathbb{R}^n$ esetén a V altér **dimenziója**:

$$\dim V = \begin{cases} 0, & \text{ha } V = \{\mathbf{0}\}; \\ \text{egy tetszőleges } B \text{ elemszáma,} & \text{ha } V \neq \{\mathbf{0}\}. \end{cases}$$

Ha $V \leq \mathbb{R}^n$ és $\dim V = k > 0$, akkor $k \leq n$, továbbá V -ben tetszőleges B, L , illetve G -re $|B| = k$, $|L| \leq k$, $|G| \geq k$. Utóbbiaknál egyenlőség természetesen lehet, pl. bázisokra, de mindjárt belátjuk, hogy csak bázisokra. Ha $|G| = k$, akkor, tudván, hogy G -ből kiválasztható B , mely viszont csak k elemű lehet, G maga B . Az L -re is érvényes hasonló állítás: a $|L| = k$, akkor, tudván, hogy L kiegészíthető B -sá, mely viszont csak k elemű lehet, L maga B . [Aki a dimenzióról hajlamos megfélekedni, az inkább úgy olvassa pl. az utolsó állítást, hogy dimenziónyi elemszámú L B is.]

DEFINÍCIÓ: $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ esetén az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ **vektorrendszer rangja** az általuk generált altér dimenziója: $r(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m) = \dim \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$ [az r helyén használatos a ρ illetve ϱ is.]

A következőkben adott bázisban koordinátaikkal megadott véges sok vektorból álló vektorrendszerrel fogjuk eldönteni, hogy L-e, meghatározzuk a rangját, az általuk generált altérben keresünk bázist, továbbá egy másik vektorról eldöntjük, hogy benne van-e az előbbi vektorrendszer által generált altérben. Mindezeket lineáris egyenletrendszerhez kapcsolva tekintjük át. Legyen adott a következő valós együtthatós, m egyenletből álló, n ismeretlenes lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Itt tehát adottak az a_{ij}, b_i valós számok és keressük az x_j megoldásokat a valós számok körében. Az egyenletek m számának megfelelően választunk $\mathbb{R}^m$ -ben egy bázist, pl. az 1/4 oldali ún. triviális (vagy standard) bázis megfelel.

Legyen tehát $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ bázis $\mathbb{R}^m$ -ben. Az egyenletrendszer adatai segítségével most megadjuk $\mathbb{R}^m$ -ben a $\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorokat a következőképpen:

$$[\mathbf{b}]_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, [\mathbf{a}_1]_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, [\mathbf{a}_2]_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, [\mathbf{a}_n]_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Látható, hogy $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ akkor és csak akkor megoldása a fenti lineáris egyenletrendszernek, ha $x_1\mathbf{a}_1 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ teljesül. Ezt a vektoregyenletet szokás a lineáris egyenletrendszer vektor-alakjának hívni. Maga a megoldhatóság tehát azzal ekvivalens, hogy $\mathbf{b} \in \text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$.

Az elemi bázistranszformáció kiinduló táblázata a koordinátaoszlopokból (az $\mathbf{e}$ bázisban):

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\dots$	$\mathbf{a}_n$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{e}_1$	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{e}_i$	a_{i1}	a_{i2}	$\dots$	a_{in}	b_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{e}_m$	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	b_m

Ezek után elemi bázistranszformációs lépések sorozatát alkalmazzuk a következő megkötésekkel: mindig $\mathbf{a}_{\bullet}$ -t próbálunk bevinni alkalmas $\mathbf{e}_{\bullet\bullet}$ helyére (az indexek ($\bullet$ illetve $\bullet\bullet$) lehetnek különbözők is, lehetnek azonosak is) úgy, hogy minden lépésben újra bázist kapjunk, s ezen új bázisban kiszámoljuk minden vektor új koordinátáit. Tehát $\mathbf{b}$ -t nem visszük be, de mindig kiszámoljuk az új koordinátáit. A már bevitt $\mathbf{a}_{\bullet}$ -k koordinátáit nem szükséges kiírni, mert azok bármikor könnyen felírhatók. Az első lépésnél az $\mathbf{e}_i$ helyére akkor vihetjük be az $\mathbf{a}_j$ -t, ha $a_{ij} \neq 0$. Csak akkor nem indul el az eljárás, ha minden $a_{ij} = 0$. Ebben az esetben $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ esetén minden valós szám n -es megoldás, különben meg nincs megoldás. Ha viszont elindul az eljárás, akkor már vigyáznunk kell, nehogy bevitt $\mathbf{a}_{\bullet}$ -t lőjünk ki egy másikkal, mert ez a felesleges lépésen túl adatvesztéssel is jár, ha a bevittet már nem írtuk ki külön. Röviden tehát mindig $\mathbf{a}_{\bullet} \rightarrow \mathbf{e}_{\bullet\bullet}$ (az indexek lehetnek azonosak is, lehetnek különbözők is!). Az eljárás előbb-utóbb véget ér, leáll: elfogyhatnak az $\mathbf{e}$ -k, vagy az $\mathbf{a}$ -k, de az is lehet, hogy a

szóba jövő helyeken csupa 0 áll a táblázatban. A bevitt $\mathbf{a}$ -k legyenek a következők: $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$, a kint maradtak (ha van ilyen): $\mathbf{a}_{i_{r+1}}, \dots, \mathbf{a}_{i_n}$. Mivel a bevittek szétszórtan lehetnek a megmaradt $\mathbf{e}$ -k között, sorcserét hajtunk végre, hogy előre kerüljenek (az áttekinthetőség kedvéért). Az így utánuk kerülő $\mathbf{e}$ -ket nem indexeljük precízen, vesszővel utalunk csupán arra, hogy az index eltérhet a feltüntetettől. A leállás utáni táblázatban a legfontosabb: a leállás után a kint maradt $\mathbf{a}$ -k alatt a vesszős $\mathbf{e}$ -k soraiban csupa 0 áll:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & \mathbf{a}_{i_{r+1}} & \dots & \mathbf{a}_{i_n} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{a}_{i_1} & d_{11} & \dots & d_{1,n-r} & d_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a}_{i_r} & d_{r1} & \dots & d_{r,n-r} & d_r \\ \mathbf{e}'_{r+1} & 0 & \dots & 0 & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}'_m & 0 & \dots & 0 & \bullet \end{array}$$

Ebből a következők olvashatók le:

$\exists$ megoldás $\iff$ $\mathbf{b}$ oszlopában a (vesszős) $\mathbf{e}$ -k soraiban csupa 0 áll vagy ez a rész nincs (azaz minden $\bullet = 0$ vagy $r = m$). Ha ez a feltétel teljesül, akkor pl. $x_{i_1} = d_1, \dots, x_{i_r} = d_r$, többi $= 0$ egy megoldás. $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$ bázis $\text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ -ben, $r(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = r$. A megoldásszám: 0 vagy 1, ha $r = n$; 0 vagy ∞ , ha $r < n$.

Az elemi bázistranszformáció kiinduló táblázatából (3/2) most emeljük ki az adatokat tartalmazó részt, s a $[\mathbf{b}]_{\mathbf{e}}$ -hez hasonlóan tegyük szögletes zárójelbe:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A második az $\mathbb{R}^m$ egy eleme, $n = 1$ esetén az első is ilyen, természetes tehát az általánosítás: az eddigi 1 oszlop helyett n oszlop, mindegyikben egy-egy valós szám m -es. Az így kapott téglalap alakú elrendezéseket mátrixoknak hívjuk, az első példában m sor és n oszlop van, ez egy $m \times n$ -es mátrix, a másodikra pedig azt mondjuk, hogy $m \times 1$ -es mátrix. (A $\times$ jel az elválasztás céljából szerepel, mert nem mindegy, hogy 2×3 vagy 3×2 alakú mátrixunk van.) Tehát:

DEFINÍCIÓ: Legyenek adottak az m és n pozitív egész számok, továbbá minden

$i \in \{1, \dots, m\}$ és $j \in \{1, \dots, n\}$ esetére az a_{ij} valós számok. Az $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

táblázatot egy $\mathbb{R}$ feletti mátrixnak nevezzük, s A -val jelöljük, részletesebben

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, vagy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, az A mátrix i -edik sora j -edik elemének

jelölése: a_{ij} vagy ${}_i[A]_j$. Az A és a B mátrixok egyenlők, ha alakjuk azonos (mondjuk $m \times n$ -es) és a megfelelő elemeik megegyeznek, azaz minden „szóbajövő” i, j párra ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$) teljesül, hogy ${}_i[A]_j = {}_i[B]_j$. Az $\mathbb{R}$ feletti $m \times n$ -es mátrixok halmazát $\mathbb{R}^{m \times n}$ -mel jelöljük ($\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m \times 1}$).

Az $\mathbb{R}^m$ -beli komponensenkénti összeadás és valós számmal való szorzás (1/2) mintájára természetes módon kínálkoznak $m \times n$ -es mátrixok esetén a megfelelő elemek összeadásával, illetve az összes elemnek egy valós számmal szorzásával a következő műveletek:

DEFINÍCIÓ: $+$: $\mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$, $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ esetén $A + B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és minden szóbjövő i, j -re $i[A + B]_j = i[A]_j + i[B]_j$;
 $\lambda \cdot$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ esetén $\lambda A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és minden szóbjövő i, j -re $i[\lambda A]_j = \lambda i[A]_j$.

Az $\mathbb{R}^{m \times n}$ -re is teljesül az 1/3 oldali 10 tulajdonság megfelelője a fenti $+$, $\lambda \cdot$ műveletekre nézve, így $\mathbb{R}^{m \times n}$ -et is $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek mondjuk, s itt is bevezethetjük a korábbi $\mathbf{0}$,

L, G, B stb. fogalmát. Pl. az 1/4-et teljesítő ún. **nullmátrix:** $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$. Az

$\mathbb{R}^m$ triviális bázisa mintájára most is könnyen találhatunk bázist: mn darab különböző olyan mátrix megfelel, ahol egy helyen 1, az összes többi helyen 0 áll. Így pl. $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ bázis.

Mátrixszorzás

Most szorozni próbálunk mátrixokat, itt azonban nem a természetesség, hanem az alkalmazhatóság a fő szempont. Az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszerhez hozzárendelhetjük a következő mátrixokat:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Most úgy szeretnénk mátrixszorzást definiálni, hogy a fenti lineáris egyenletrendszer ekvivalens legyen az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mátrixegyenlettel. Ha sikerül, akkor ez lesz a lineáris egyenletrendszer mátrix-alakja. Ezek szerint nem éppen azonos alakú mátrixokat kívánunk szorozgatni: a tervezett bal oldalon egy $m \times n$ -es és egy $n \times 1$ -es mátrix van, a jobb oldalon pedig egy $m \times 1$ -es mátrix, s az A mátrix i -edik sorának elemeit rendre összeszorozzuk az $\mathbf{x}$ (egyetlen) oszlopának elemeivel: az elsőt az elsővel, a másodikat a másodikkal, ..., az utolsót az utolsóval [egyik sem fogy el hamarabb, mindkettőből n darab van!], végül a kapott szorzatokat összeadjuk, ez lesz a $\mathbf{b}$ (egyetlen) oszlopának i -edik eleme. Ha ezt látjuk, akkor már a további általánosítás természetes: 1 oszlop helyett k oszlop szerepeltetésénél csak az „(egyetlen)”-t kell mindkétyszer kicserélni „ j -edik”-re:

DEFINÍCIÓ: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ esetén $AB \in \mathbb{R}^{m \times k}$ úgy, hogy minden szóbjövő i, j -re (most $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq k$)

$$i[AB]_j = i[A]_{11}[B]_j + i[A]_{21}[B]_j + \dots + i[A]_{n1}[B]_j = \sum_{\ell=1}^n i[A]_{\ell\ell}[B]_j.$$

Ez az ún. sor-oszlop szorzás: a szorzatmátrix i -edik sora j -edik elemét úgy kapjuk, hogy a bal oldali mátrix i -edik sorának és a jobb oldali mátrix j -edik oszlopának megfelelő elemeit összeszorozzuk, s a kapott szorzatokat összeadjuk.