

Lineáris algebra (A, B, C)

12. előadás

(vázlat)

Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, továbbá V vektortér a $\mathbb{K}$ felett (az 1/3 oldali 10 tulajdonság megfelelőjével). Korábban egy skaláris szorzatnak nevezett $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ függvényre teljesültek a következők minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén:

- 1./ $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$;
- 2./ $\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$;
- 2'./ $\langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$;
- 3./ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$;
- 3'./ $\langle \mathbf{y} + \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{x} \rangle$;
- 4.a/ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ mindig (valós és) nemnegatív;
- 4.b/ $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

A 9/1 oldalon csak 1./, 2./, 3./, 4.a/ és 4.b/ szerepelt követelményként, a többi ezek felhasználásával igazoltuk. Tekintsük most n tagú lineáris kombinációk skaláris szorzatát (9/4 mintájára majd $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázisban lesz érdekes, de ONB helyett csak B):

$$\left\langle \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^n y_k \mathbf{e}_k \right\rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_j \overline{y_k} \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k \rangle$$

könnyedén adódik 2./, 2'./, 3./ és 3'./ felhasználásával. Tehát lineáris kombinációk skaláris szorzatának fenti kiszámolásához 4.a/ és 4.b/ egyáltalán nem kellett, s az 1./ is csak a 2'./ és 3'./ igazolásához kellett korábban. Most az összesen 7 darab követelményből fogunk 4-et kiemelni: a skaláris szorzat olyan általánosításait vizsgáljuk, amelyekre a fenti számolás szintén elvégezhető 2./, 2'./, 3./ és 3'./ megfelelőjének feltételezésével. Az alábbi definícióban a számozás a korábbiakkal való összehasonlítást szolgálja, ne hiányoljuk az 1.-et (majd lesz később meglepően kétarcú szerepben).

DEFINÍCIÓ: Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, továbbá V vektortér a $\mathbb{K}$ felett (az 1/3 oldali 10 tulajdonság megfelelőjével). Az $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ függvényt V -n értelmezett ($\mathbb{K}$ -tól függően valós vagy komplex) bilineáris függvénynek, bilineáris alaknak, vagy bilineáris formának hívjuk, ha teljesülnek a következők minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén:

- 2./ $\mathcal{A}(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;
- 2'./ $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = \bar{\lambda} \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;
- 3./ $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$;
- 3'./ $\mathcal{A}(\mathbf{y} + \mathbf{z}, \mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{z}, \mathbf{x})$.

[Az elnevezések használata elég kaotikus, a második és harmadik elnevezéssel néha arra utalnak, ha az értékek nem egyszerűen $\mathbb{K}$ -ban, hanem egy $\mathbb{K}$ feletti vektortérben vannak.] Némi cserebere árán eme 4 követelmény akár így is írható:

- 2./ $\mathcal{A}(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;
- 2'./ $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = \bar{\lambda} \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;
- 3'./ $\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{A}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$;
- 3./ $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$.

Ezeket szokták röviden úgy fogalmazni, hogy az $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ rögzített $\mathbf{y}$ mellett az első változóban lineáris leképezés, míg rögzített $\mathbf{x}$ mellett a második változóban (a konjugálás miatt) "másodfajú" lineáris leképezés.

Ha az $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ a V -n értelmezett bilineáris alak, akkor a V -beli $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázis lineáris kombinációit helyettesítve:

$$\mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^n y_k \mathbf{e}_k\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_j \overline{y_k} \mathcal{A}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k),$$

ami igazán motiválhatja bilineáris alak $\mathbf{e}$ bázisbeli mátrixának bevezetését:

DEFINÍCIÓ: Legyen az $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ a V -n értelmezett bilineáris alak, továbbá $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázis V -ben. $[\mathcal{A}]^{\mathbf{e}} \in \mathbb{K}^{n \times n}$, és pedig minden szóbajövő j, k esetén $(a_{jk} =) {}_j[\mathcal{A}]_k^{\mathbf{e}} = \mathcal{A}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$.

Így az előbbi kifejezés a következő formában is írható:

$$\mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^n y_k \mathbf{e}_k\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_j \overline{y_k} a_{jk},$$

speciálisan

$$\mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_j \overline{x_k} a_{jk},$$

ugyanaz $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_j x_k a_{jk}$$

alakot ölt. Ez ugyanúgy néz ki, mint a 9/4 oldalon a szimmetrikus mátrixhoz rendelt kvadratikus alak, de hol van most a szimmetria? Újabb elnevezésre ad alkalmat, ha az 1./ megfelelője is érvényes egy bilineáris alakra:

DEFINÍCIÓ: Legyen az $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ a V -n értelmezett bilineáris alak. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ **Hermite-féle** bilineáris alak ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén a **szimmetrikus** bilineáris alak kifejezés is használatos), ha $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ esetén teljesül: 1./ $\mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \overline{\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$.

Vérszemet kapva, menten definiálhatunk a bilineáris alakunkhoz tartozó kvadratikus alakot is, itt azonban nem árt az óvatosság, különösen definitségi kérdéseknél!

DEFINÍCIÓ: Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, az $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ pedig V -n értelmezett **szimmetrikus** bilineáris alak (tehát most minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ esetén teljesül: 1./ $\mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$). Ekkor az $\mathcal{A}$ -hoz tartozó **Q kvadratikus alak**: $Q : V \rightarrow \mathbb{R}; \quad Q(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

DEFINÍCIÓ: Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, az $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ pedig V -n értelmezett bilineáris alak. Ekkor az $\mathcal{A}$ -hoz tartozó **kvadratikus alak**: $Q : V \rightarrow \mathbb{C}; \quad Q(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Meglepő lehet, hogy az 1./ megfelelője az utóbbi definícióban nem szerepel! Valóban nincs rá szükség, majd egész más szerepe lesz a komplex esetről. Először a valós esetben vizsgáljuk meg, hogy ott viszont mire jó a szimmetria. Tekintsük $V = \mathbb{R}^2$ esetén a triviális bázisban $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, illetve $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixú bilineáris alakokat, előbbi per-

sze szimmetrikus, utóbbi nem! Viszont a $\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 x_j x_k a_{jk}$ kifejezés mindkét esetben mindig nullát szolgáltat. Ha tehát a nem szimmetrikus esetre is kiterjesztenénk a definíciót, különböző bilineáris alakokhoz tartozhatna azonos kvadratikus alak. Szimmetrikus bilineáris alakokra szorítkozva azonban igazolható, hogy a kvadratikus alak értékeiből egyértelműen következtethetünk az őt szolgáltató bilineáris alak értékeire.

TÉTEL: Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, az $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ pedig V -n értelmezett **szimmetrikus** bilineáris alak (tehát most minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ esetén teljesül: 1./ $\mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$). Ekkor az $\mathcal{A}$ minden értéke kifejezhető az $\mathcal{A}$ -hoz tartozó Q kvadratikus alak alkalmas értékei segítségével.

[Bizonyítás: Most $\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}, \mathbf{y})$, tehát $Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = Q(\mathbf{x}) + 2\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + Q(\mathbf{y})$. Ebből $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ kifejezhető Q értékeivel.]

A legfontosabb tételek, szövegközi állítások felsorolása, utánuk (ha bizonyítás is volt) a bizonyítás helye: előadás/oldal.

ÖSSZEFOGLALÁS (az $\mathbb{R}^n$ -beli komponensenkénti összeadás $(+)$ és valós számmal való szorzás $(\lambda \cdot)$ tulajdonságai):

I./1. $+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, azaz $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ -hez hozzá van rendelve egy $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$;

I./2. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{b} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (kommutativitás);

I./3. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (asszociativitás);

I./4. $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n : \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} (= \mathbf{a} + \mathbf{0})$ („nullvektor” létezése);

I./5. $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \exists (-\mathbf{a}) \in \mathbb{R}^n : (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0} (= \mathbf{a} + (-\mathbf{a}))$ („ellentett” létezése);

II./1. $\lambda \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, azaz $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ -hez hozzá van rendelve egy $\lambda \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$;

II./2. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad (\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a})$ („asszociativitás”);

II./3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad (\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ (első disztributivitás);

II./4. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ (második disztributivitás);

II./5. $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad 1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

1/1-3.

TÉTEL: $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k \in V (\subseteq \mathbb{R}^n)$ -ben, $\mathbf{a} \in V \Rightarrow \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} : \mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{b}_k$.

2/1.

TÉTEL: Ha $V \subseteq \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k \in V$ olyan, hogy $\forall \mathbf{a} \in V \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} : \mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{b}_k$, akkor $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ bázis V -ben.

2/1.

TÉTEL (ELEMI BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ): Legyen $V \subseteq \mathbb{R}^n$; $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ bázis V -ben; $\mathbf{a} \in V$; $\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{b}_k$; i rögzített, $1 \leq i \leq k$. Ekkor

$\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{a}, \mathbf{b}_{i+1}, \dots, \mathbf{b}_k$ bázis V -ben $\iff \alpha_i \neq 0$.

2/1.

TÉTEL: Legyen $k \geq 1$; $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$. Ekkor az $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_k$ egy tetszőleges zárójellezése $= (((\dots((\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_3) + \dots) + \mathbf{a}_{k-1}) + \mathbf{a}_k$.

2/2.

TÉTEL: $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \exists! \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

2/2.

TÉTEL: $k \geq 2, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ esetén

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n \iff \exists \mathbf{a}_i$, ami lineárisan függ az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_k$ vektortól.

2/3.

TÉTEL: $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in L$ és $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\mathbf{b}$ lineárisan függ az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ -től.

2/3.

TÉTEL: Tetszőleges $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ esetén $W(A) \subseteq \mathbb{R}^n$, továbbá $A \subseteq W(A)$.

2/3.

TÉTEL: $\{W_1 \subseteq \mathbb{R}^n, W_2 \subseteq \mathbb{R}^n\} \Rightarrow W_1 \cap W_2 \subseteq \mathbb{R}^n$.

2/3.

TÉTEL: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ esetén $\text{Span}(A) = W(A)$.

2/4.

TÉTEL: Ha $V \subseteq \mathbb{R}^n$; $V \neq \{\mathbf{0}\}$ és V -ben van véges generátorrendszer, akkor létezik bázis V -ben, sőt bármely véges generátorrendszerből kiválasztható bázis.

2/4.

KICSERÉLÉSI TÉTEL: Ha $V \subseteq \mathbb{R}^n$; $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ -beli L ; $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m \in V$ -ben, akkor
 $\alpha) \exists j \in \{1, \dots, m\} : \mathbf{b}_j, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in L \quad \beta) k \leq m$ (azaz $|L| \leq |G|$).

3/1.

TÉTEL: Ha $V \leq \mathbb{R}^n$; B_1, B_2 bázisok V -ben, k pozitív egész, $|B_1| = k$, akkor B_2 is véges és $|B_2| = k$.

3/1.

TÉTEL: $V \leq \mathbb{R}^n$ esetén V -ben létezik véges generátorrendszer, továbbá V -ben bármely lineárisan független rendszer kiegészíthető V bázisává.

3/1.

(Lineáris egyenletrendszer:)

$\exists$ megoldás $\iff$ $\mathbf{b}$ oszlopában a (vesszős) $\mathbf{e}$ -k soraiban csupa 0 áll vagy ez a rész nincs (azaz minden $\bullet = 0$ vagy $r = m$). Ha ez a feltétel teljesül, akkor pl. $x_{i_1} = d_1, \dots, x_{i_r} = d_r$, többi $= 0$ egy megoldás. $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$ bázis $\text{Span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ -ben, $r(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = r$. A megoldásszám: 0 vagy 1, ha $r = n$; 0 vagy ∞ , ha $r < n$.

3/3.

TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ esetén $I_m A = A$ és $A I_n = A$.

4/1.

TÉTEL (A transzponálás kapcsolata az eddigi műveletekkel):

$$A, B \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow (A + B)^T = A^T + B^T;$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow (\lambda A)^T = \lambda A^T;$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times k} \Rightarrow (AB)^T = B^T A^T.$$

4/2.

TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{m \times n_1}, B \in \mathbb{R}^{n_2 \times k_2}, C \in \mathbb{R}^{k_3 \times s}$ esetén

$$\begin{aligned} \exists (AB)C &\iff \underbrace{\{n_1 = n_2 \text{ és } k_2 = k_3\}} \\ &\Downarrow \\ (AB)C &= A(BC). \end{aligned}$$

4/2.

TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{m \times n_1}, B \in \mathbb{R}^{n_2 \times k_2}, C \in \mathbb{R}^{n_3 \times k_3}$ esetén

$$\begin{aligned} \exists A(B + C) &\iff \underbrace{\{n_1 = n_2 = n_3 \text{ és } k_2 = k_3\}} \\ &\Downarrow \\ A(B + C) &= AB + AC. \end{aligned}$$

4/2.

TÉTEL: $\lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times k} \Rightarrow \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

4/2.

(Lineáris egyenletrendszer általános megoldása:) Tetszőleges $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_r \\ \mathbf{x}''_{n-r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ -re

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \iff A_2\mathbf{x} = \mathbf{d} \iff [I_r, D] \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_r \\ \mathbf{x}''_{n-r} \end{bmatrix} = \mathbf{d} \iff \mathbf{x}'_r = \mathbf{d} - D\mathbf{x}''_{n-r},$$

amivel megkaptuk az általános megoldást: $\mathbf{x}''_{n-r}$ komponensei a szabad (vagy független) változók, $\mathbf{x}'_r$ komponensei a kötött (vagy függő) változók.

4/4.

TÉTEL: Legyenek $C = [\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n]$ és $D = [\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_k]$ ebben a sorrendben összesorozható $\mathbb{R}$ feletti mátrixok. Ekkor $\varrho_{\circ}(CD) \leq \varrho_{\circ}(C)$.

4/4.

TÉTEL: Tetszőleges $\mathbb{R}$ feletti A mátrixra $\varrho_{\circ}(A) = \varrho_s(A)$ [ezentúl $= \varrho(A)$, az A rangja; a ϱ helyett használatos ρ vagy akár r is].

4/4.

[Folyt. köv.]