

Lineáris algebra (A, B, C)

11. előadás

(vázlat)

Ígértük, hogy elégséges feltételt adunk SB létezésére a különböző sajátértékű sajátvektorok függetlenségének igazolása révén. Ezt mátrixok sajátvektorainak vizsgálatakor is megtehettük volna, idő hiányában halasztottuk, most viszont a lineáris transzformációkon gyakoroljuk inkább (mátrixokra hasonló a megfogalmazás és a bizonyítás is).

TÉTEL: Legyen $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, továbbá $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ sajátvektorai φ -nek, továbbá $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ a megfelelő sajátértékek, melyek **páronként különbözők**. Ekkor $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ lineárisan független sajátvektorrendszer.

[Bizonyítás (k szerinti teljes indukcióval): A $k = 1$ eset nyilvánvaló, hisz egy sajátvektor nem lehet nullvektor. Ha már tudjuk, hogy $k - 1$ -re igaz az állítás (így $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$ L), tegyük fel, hogy $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ Ö. Ekkor $\mathbf{u}_k$ lineárisan függ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$ -től: $\mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \mathbf{u}_j$. Ebből $\varphi(\mathbf{u}_k) = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \varphi(\mathbf{u}_j)$, tehát $\lambda_k \mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \lambda_j \mathbf{u}_j$, másrészt $\mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \mathbf{u}_j$ miatt $\lambda_k \mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j \lambda_k \mathbf{u}_j$. A $\lambda_k \mathbf{u}_k$ kétféle előállításából azt kapjuk, hogy $\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_k) \mathbf{u}_j$. Mivel $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k-1}$ L, az adódik, hogy $j = 1, \dots, k - 1$ -re $\alpha_j (\lambda_j - \lambda_k) = 0$, csak hogy itt $\lambda_j - \lambda_k \neq 0$, tehát $j = 1, \dots, k - 1$ -re $\alpha_j = 0$, azaz $\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$, ami ellentmond annak, hogy $\mathbf{u}_k$ sajátvektor.]

KÖVETKEZMÉNY: Ha a $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ lineáris transzformációnak n darab **páronként különböző** sajátértéke van (ahol $n = \dim \mathbb{R}^n$), akkor létezik $\mathbb{R}^n$ -ben SB, azaz a φ sajátvektoraiból álló bázis.

Sajnos, a fenti eredményben az n darab (azaz dimenziónyi) különböző sajátérték létezése az SB létezésének csupán elégséges feltétele: Tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ -re $\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ definícióval $\varepsilon \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, melynek minden $\mathbf{0}$ -tól különböző $\mathbb{R}^n$ -beli vektor sajátvektora az 1 sajátértékkel, tehát van SB, viszont az 1 az egyetlen sajátérték.

A 9/1 oldalon szerepelt már olyan megfogalmazás, hogy "legyen V vektortér a $\mathbb{K}$ felett (az 1/3 oldali 10 tulajdonság megfelelőjével)" az euklideszi terek általános tárgyalása céljából. Egyébként viszont a zárthelyik könnyítésére többnyire $\mathbb{R}^n$ szerepelt, ami félrevezető képet is eredményezhet a későbbi tanulmányok szempontjából: $\mathbb{R}^n$ -ben nem volt probléma a bázis kereséssel, a bázisok elemszámának összehasonlításával, mivel volt benne **véges** generátorrendszer. Az általánosabb tárgyalás sok nehézséggel jár, de legalább a kezdő lépést tegyük meg irányában, legalább $\mathbb{R}$ felett: Ezentúl legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett (az 1/3 oldali 10 tulajdonság megfelelőjével).

DEFINÍCIÓ: Az $\mathbb{R}$ feletti V vektortér dimenziója:

$$\dim V = \begin{cases} 0, & \text{ha } V = \{\mathbf{0}\}; \\ \text{egy tetszőleges } B \text{ elemszáma,} & \text{ha } V \neq \{\mathbf{0}\} \text{ és van véges } G \text{ } V\text{-ben;} \\ \infty & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy a definíció harmadik része számosságfogalom ismeretében finomítható $|B|$ -ra, azaz báziselemhalmaz számosságára.

Ha tekintjük az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények szokásos $\mathbb{R}$ feletti vektorterét [$V = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, $f, g \in V$ esetén tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ -re $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in V$ esetén tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ -re $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$], ebben a polinomfüggvények alterét (az 1/4 oldali definíció kiterjesztésével), erről könnyen belátható, hogy nincs véges generátorrendszere (összeadás és skalárral való szorzás során a fokszám nem nőhet), így dimenziója ∞ .

Fárasztó és időigényes volna most a korábbi definíciókat és tételeket kiterjeszteni a kicsit általánosabb esetre, de legalább a lineáris leképezéseknél tegyük meg ezt, hiszen itt még hátra van pl. az izomorfizmus vizsgálata egyes vektorterek között, ami így határozottan izgalmasabb lehet.

DEFINÍCIÓ: Legyen V_1 és V_2 vektortér $\mathbb{R}$ felett, $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$.

φ **vektortérhomomorfizmus** [vagy *homogén lineáris leképezés*, vagy

lineáris leképezés, vagy *művelettartó leképezés* $+$, $\lambda \cdot$ -ra], ha

1./ $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1 \Rightarrow \varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})$;

2./ $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in V_1 \Rightarrow \varphi(\lambda \mathbf{u}) = \lambda \varphi(\mathbf{u})$.

Ha egy lineáris leképezés, azaz vektortérhomomorfizmus netán bijektív, akkor vektortér-izomorfizmusnak hívjuk.

Az egyértelmű kiterjesztési tétel bizonyítása az általánosabb esetben hasonlóan történhet, de legalább mondjuk ki:

EGYÉRTELMŰ KITERJESZTÉSI TÉTEL: Legyen V_1 és V_2 vektortér az $\mathbb{R}$ felett; $\dim V_1 = n > 0$; $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázis V_1 -ben; $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ tetszőleges vektorok V_2 -ben. Ekkor $\exists! \varphi : V_1 \rightarrow V_2$ vektortérhomomorfizmus, melyre $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i$ ($i = 1, \dots, n$).

DEFINÍCIÓ: Ha $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázis V_1 -ben; $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$ bázis V_2 -ben; $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ vektortérhomomorfizmus, akkor a φ mátrixa az $\mathbf{e}; \mathbf{f}$ bázispárban

$[\varphi]_{\mathbf{e}; \mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} [[\varphi(\mathbf{e}_1)]_{\mathbf{f}}, \dots, [\varphi(\mathbf{e}_n)]_{\mathbf{f}}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

A definícióból adódik, hogy tetszőleges $\mathbf{x} \in V_1$ esetén $[\varphi(\mathbf{x})]_{\mathbf{f}} = [\varphi]_{\mathbf{e}; \mathbf{f}} [\mathbf{x}]_{\mathbf{e}}$.

Különösen fontosak lesznek azok a lineáris leképezések, amelyeknél $V_1 = V_2 = V$, ezek a V vektortér **LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓI**. Ilyenkor megállapodunk abban, hogy a mátrix definíciójában mindkét helyre ugyanazt a bázist vesszük: Ha $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázis V -ben, $\varphi : V \rightarrow V$ lineáris transzformáció, akkor $[\varphi]_{\mathbf{e}} \stackrel{\text{def}}{=} [\varphi]_{\mathbf{e}; \mathbf{e}}$.

DEFINÍCIÓ: Legyen V_1 és V_2 vektortér $\mathbb{R}$ felett; $\mathcal{H}om(V_1, V_2)$ jelölje a V_1 -ből V_2 -be képező vektortérhomomorfizmusok halmazát.

$\varphi, \psi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$ esetén legyen $\varphi + \psi : V_1 \rightarrow V_2$ úgy, hogy $\mathbf{u} \in V_1$ -re $(\varphi + \psi)(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{u})$. $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$ esetén legyen $\lambda \varphi : V_1 \rightarrow V_2$ úgy, hogy $\mathbf{u} \in V_1$ -re $(\lambda \varphi)(\mathbf{u}) = \lambda(\varphi(\mathbf{u}))$.

Könnyen látható, hogy az imént definiált összeg és számszoros is $\mathcal{H}om(V_1, V_2)$ -ben van, továbbá azt is, hogy $\mathcal{H}om(V_1, V_2)$ vektortér az $\mathbb{R}$ felett a fenti műveletekre.

DEFINÍCIÓ: Legyen V_1 és V_2 vektortér $\mathbb{R}$ felett; $\varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$.

φ **képtere:** $\mathcal{I}m \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{v}' \mid \mathbf{v}' \in V_2 \exists \mathbf{u} \in V_1 \varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{v}'\}$;

φ **magtere:** $\mathcal{K}er \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in V_1 \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}'\}$.

Könnyen igazolható, hogy $\mathcal{I}m \varphi \subseteq V_2$ és $\mathcal{K}er \varphi \subseteq V_1$. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{I}m \varphi = V_2 \Leftrightarrow \varphi$ szürjektív. Mivel $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}' \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathcal{K}er \varphi$, ezért az is igaz, hogy φ injektív $\Leftrightarrow \mathcal{K}er \varphi = \{\mathbf{0}\}$.

TÉTEL: Legyen V_1 és V_2 véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett. Ekkor

$$V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2.$$

[Bizonyítás: Legyen $\dim V_1 = n$. Az $n = 0$ eset triviális mindkét irányban. Tegyük fel, hogy $n > 0$.

$\Rightarrow$: $\exists \varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$, mely bijektív. Legyen $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázis V_1 -ben. *Állítás:*

$\varphi(\mathbf{e}_1), \dots, \varphi(\mathbf{e}_n)$ bázis V_2 -ben. [[biz: G: Legyen $\mathbf{v}' \in V_2$. φ szürjektivitása miatt $\exists \mathbf{u} \in V_1 : \mathbf{v}' = \varphi(\mathbf{u})$. Ezt a bázissal felírva: $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + \dots + u_n \mathbf{e}_n$, így a két művelettartást felhasználva $\mathbf{v}' = \varphi(u_1 \mathbf{e}_1 + \dots + u_n \mathbf{e}_n) = u_1 \varphi(\mathbf{e}_1) + \dots + u_n \varphi(\mathbf{e}_n)$. L: Tegyük fel, hogy

$\alpha_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \dots + \alpha_n\varphi(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}'$, azaz $\varphi(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}' = \varphi(\mathbf{0})$. A φ injektivitása miatt $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$, így már minden $\alpha_i = 0$.]

$\Leftarrow$: Legyen $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázis V_1 -ben, $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ bázis V_2 -ben. Az egyértelmű kiterjesztési tétel alapján $\exists! \varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$, melyre $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{f}_i$ ($i = 1, \dots, n$). *Állítás*: φ bijektív. [biz: *szürjektivitás*: Legyen $\mathbf{v}' \in V_2$. Ezt felírhatjuk V_2 bázisával: $\mathbf{v}' = \beta_1\mathbf{f}_1 + \dots + \beta_n\mathbf{f}_n = \beta_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \dots + \beta_n\varphi(\mathbf{e}_n) = \varphi(\beta_1\mathbf{e}_1 + \dots + \beta_n\mathbf{e}_n)$. *injektivitás*: Tudjuk már, hogy φ injektív $\Leftrightarrow \mathcal{K}er \varphi = \{\mathbf{0}\}$. Tegyük fel, hogy $\mathbf{x} \in \mathcal{K}er \varphi$, így $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}'$. $\mathbf{x}$ felírása a bázissal $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$. Tehát $\mathbf{0}' = \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n) = x_1\mathbf{f}_1 + \dots + x_n\mathbf{f}_n$, így már minden $x_i = 0$.] Így a φ már vektortérizomorfizmus.]

DIMENZIÓÖSSZEFÜGGÉS: Legyen V_1 és V_2 vektortér $\mathbb{R}$ felett, $\varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$.

Ha V_1 véges dimenziós, akkor $\dim \mathcal{I}m \varphi + \dim \mathcal{K}er \varphi = \dim V_1$.

(Itt φ rangja: $r(\varphi) = \dim \mathcal{I}m \varphi$; φ defektusa: $d(\varphi) = \dim \mathcal{K}er \varphi$.)

[Bizonyítás: Legyen $\dim V_1 = n$. Az $n = 0$ eset most is triviális. Tegyük fel, hogy $n > 0$. Legyen $k = \dim \mathcal{K}er \varphi$. $0 < k < n$ esetén veszünk egy $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ bázist $\mathcal{K}er \varphi$ -ben, ez L a V_1 -ben, így kiegészíthető bázissá: $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-k}$ bázis V_1 -ben. *Állítás*: $\varphi(\mathbf{b}_1), \dots, \varphi(\mathbf{b}_{n-k})$ bázis $\mathcal{I}m \varphi$ -ben. [biz: G : $\mathcal{I}m \varphi$ elemei $\varphi(\mathbf{u})$ alakúak, ahol $\mathbf{u} \in V_1$. $\mathbf{u}$ -t a bázissal felírva és beírva: $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\alpha_1\mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{a}_k + \beta_1\mathbf{b}_1 + \dots + \beta_{n-k}\mathbf{b}_{n-k}) = \alpha_1\varphi(\mathbf{a}_1) + \dots + \alpha_k\varphi(\mathbf{a}_k) + \beta_1\varphi(\mathbf{b}_1) + \dots + \beta_{n-k}\varphi(\mathbf{b}_{n-k}) = \beta_1\varphi(\mathbf{b}_1) + \dots + \beta_{n-k}\varphi(\mathbf{b}_{n-k})$. L : Tegyük fel, hogy $\gamma_1\varphi(\mathbf{b}_1) + \dots + \gamma_{n-k}\varphi(\mathbf{b}_{n-k}) = \mathbf{0}'$. Ekkor $\varphi(\gamma_1\mathbf{b}_1 + \dots + \gamma_{n-k}\mathbf{b}_{n-k}) = \mathbf{0}'$, tehát $\gamma_1\mathbf{b}_1 + \dots + \gamma_{n-k}\mathbf{b}_{n-k} \in \mathcal{K}er \varphi$, így $\gamma_1\mathbf{b}_1 + \dots + \gamma_{n-k}\mathbf{b}_{n-k} = \delta_1\mathbf{a}_1 + \dots + \delta_k\mathbf{a}_k$ alakú, emiatt már minden $\gamma_i = 0$.] A $k = 0$ esetben $\mathbf{a}$ -k nélkül ugyanígy dolgozhatunk a V_1 tetszőleges $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ bázisával. A $k = n$ esetben $\mathcal{K}er \varphi = V_1$, így $\mathcal{I}m \varphi = \{\mathbf{0}'\}$.]

SZORZÁSTÉTEL: Legyen V_1, V_2 és V_3 vektortér $\mathbb{R}$ felett, dimenziójuk rendre n, m, s (pozitív egészek); $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázis V_1 -ben; $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$ bázis V_2 -ben; $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_s$ bázis V_3 -ban; $\varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$, $\psi \in \mathcal{H}om(V_2, V_3)$. Ekkor

$$[\psi\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{g}} = [\psi]^{\mathbf{f};\mathbf{g}}[\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}}.$$

[Bizonyítás: Emlékezzünk vissza a definícióra: $[\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} [[\varphi(\mathbf{e}_1)]_{\mathbf{f}}, \dots, [\varphi(\mathbf{e}_n)]_{\mathbf{f}}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Így minden szóba jövő i -re

$$\varphi(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^m {}_j[\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}} \mathbf{f}_j.$$

A másik két esetre felírva ennek megfelelőjét, azt kapjuk, hogy

$$\psi(\mathbf{f}_j) = \sum_{t=1}^s {}_t[\psi]^{\mathbf{f};\mathbf{g}} \mathbf{g}_t, \quad (\psi\varphi)(\mathbf{e}_i) = \sum_{t=1}^s {}_t[\psi\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{g}} \mathbf{g}_t,$$

$$\begin{aligned} (\psi\varphi)(\mathbf{e}_i) &= \psi(\varphi(\mathbf{e}_i)) = \psi\left(\sum_{j=1}^m {}_j[\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}} \mathbf{f}_j\right) = \sum_{j=1}^m {}_j[\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}} \psi(\mathbf{f}_j) = \sum_{j=1}^m {}_j[\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}} \sum_{t=1}^s {}_t[\psi]^{\mathbf{f};\mathbf{g}} \mathbf{g}_t = \\ &= \sum_{t=1}^s \left(\sum_{j=1}^m {}_j[\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}} {}_t[\psi]^{\mathbf{f};\mathbf{g}} \right) \mathbf{g}_t = \sum_{t=1}^s \left(\sum_{j=1}^m {}_t[\psi]^{\mathbf{f};\mathbf{g}} {}_j[\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}} \right) \mathbf{g}_t. \end{aligned}$$

A bázissal való felírás egyértelműségét felhasználva, a $\mathbf{g}_t$ együtthatóit vizsgálva:

${}_t[\psi\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{g}} = \sum_{j=1}^m {}_t[\psi]^{\mathbf{f};\mathbf{g}} {}_j[\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}}$, ez pedig épp a szorzatmátrix t -edik sorának i -edik eleme.]

Lineáris transzformációk esetén most azt nézzük meg, hogyan változik a mátrix, ha a bázist változtatjuk.

TÉTEL (ÚJ BÁZISRA VALÓ ÁTTÉRÉS): Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett; $\dim V = n > 0$; $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázis V -ben; $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ bázis V -ben. Ekkor $\exists! \tau \in \mathcal{H}om(V, V) : \tau(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i$ ($i = 1, \dots, n$). Legyen $D = [\tau]^e$. Ekkor D invertálható, és tetszőleges $\varphi \in \mathcal{H}om(V, V)$ esetén

$$[\varphi]^{\mathbf{e}'} = D^{-1}[\varphi]^e D.$$

[Bizonyítás: Mivel $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ is, és $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ is bázis V -ben, az egyértelmű kiterjesztési tételt két szereposztásban is használhatjuk, így $\exists! \tau, \gamma \in \mathcal{H}om(V, V) : \tau(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i, \gamma(\mathbf{e}'_i) = \mathbf{e}_i$ ($i = 1, \dots, n$). Így $\gamma(\tau(\mathbf{e}_i)) = \gamma(\mathbf{e}'_i) = \mathbf{e}_i$ minden i -re, tehát $\gamma\tau = \varepsilon$, ahol ε a V identitása: $\varepsilon(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \forall \mathbf{v} \in V$ -re. A szorzástételt használva (minden bázis helyébe $\mathbf{e}$ -t írva): $[\gamma]^e[\tau]^e = [\gamma\tau]^e = [\varepsilon]^e = I_n$, tehát $D = [\tau]^e$ invertálható. $\varphi \in \mathcal{H}om(V, V)$ esetén minden szóba jövő i -re

$$\varphi(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^n [\varphi]_i^e \mathbf{e}_j, \quad \varphi(\mathbf{e}'_i) = \sum_{j=1}^n [\varphi]_i^{\mathbf{e}'} \mathbf{e}'_j, \quad \varphi(\tau(\mathbf{e}_i)) = \sum_{j=1}^n [\varphi]_i^{\mathbf{e}'} \tau(\mathbf{e}_j),$$

$$\gamma(\varphi(\tau(\mathbf{e}_i))) = \gamma\left(\sum_{j=1}^n [\varphi]_i^{\mathbf{e}'} \tau(\mathbf{e}_j)\right) = \sum_{j=1}^n [\varphi]_i^{\mathbf{e}'} \gamma(\tau(\mathbf{e}_j)) = \sum_{j=1}^n [\varphi]_i^{\mathbf{e}'} \mathbf{e}_j.$$

Tehát

$$[\varphi]^{\mathbf{e}'} = [\gamma\varphi\tau]^e = [\gamma]^e[\varphi]^e[\tau]^e = D^{-1}[\varphi]^e D.$$

Ez a tétel magyarázza meg, miért olyan használható fogalom a mátrixok hasonlósága. Korlátja viszont az $\mathbb{R}$, ami adott a V -vel együtt; viszont ugyanilyen tétel igazolható $\mathbb{C}$ feletti vektorterekre is. Bebizonyítható, hogy minden $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hasonló a $\mathbb{C}$ felett

egy blokk-diagonális mátrixhoz, melyben a diagonálisbeli blokkok

$$\begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma \end{bmatrix}$$

alakúak (a méret és $\gamma \in \mathbb{C}$ változhat, hisz a γ -k épp a sajátértékek eme speciális felső háromszög mátrixban), amelyekkel még mindig tűrhetően lehet számolni. A fenti blokk neve Jordan blokk, az ilyenekből összerakott, A -hoz $\mathbb{C}$ felett hasonló blokk-diagonális mátrix az A Jordan-féle normálalakja. A "tűrhetően lehet számolni" kifejezés arra utal, hogy egy blokkdiagonális mátrix N -edik hatványát a diagonálisbeli blokkok N -edik hatványra emelésével számolhatjuk ki, ahol most alkalmazható a binomiális tétel, mert felcserélhető mátrixok összegét kell hatványozni: ha az iménti Jordan-blokk $k \times k$ -as, akkor

$$\begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \text{ ahol az első tag } \gamma I_k,$$

így felcserélhető a második taggal.