

Lineáris algebra (A, B, C)

10. előadás

(vázlat)

Amikor egy valós szimmetrikus mátrixhoz SONB-t keresünk, ezt végezhetjük sajátalterenként (majd összerakva őket), mivel a különböző sajátalterek ortogonálisak:

TÉTEL: Legyen $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ha λ és μ az A különböző sajátértékei, továbbá $\mathbf{x} \in W_\lambda$, $\mathbf{y} \in W_\mu$, akkor $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

[Bizonyítás: $\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (A\mathbf{x})^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T A^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mu \mathbf{y} \rangle = \mu \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ miatt $(\lambda - \mu) \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, $\lambda - \mu \neq 0$ adja az állítást.]

Lineáris leképezések

Legyen most $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és vizsgáljuk meg a következő leképezés kapcsolatát a vektortérműveletekkel: $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\varphi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$;

$\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \varphi(\lambda \mathbf{x}) = A(\lambda \mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda \varphi(\mathbf{x})$.

A példában összeg képe a képek összege volt, számszoros képe pedig a kép számszorosa.

DEFINÍCIÓ: Legyen $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. φ **vektortérhomomorfizmus** [vagy *homogén lineáris leképezés*, vagy **lineáris leképezés**, vagy *művelettartó leképezés* +, λ -ra], ha

1./ $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \varphi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})$;

2./ $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \varphi(\lambda \mathbf{u}) = \lambda \varphi(\mathbf{u})$.

Ha egy lineáris leképezés, azaz vektortérhomomorfizmus netán bijektív, akkor vektortérizomorfizmusnak hívjuk.

Egy lineáris leképezés bázison tetszőlegesen előírható, ez viszont már meg is határozza:

EGYÉRTELMEŰ KITERJESZTÉSI TÉTEL: Legyen $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázis $\mathbb{R}^n$ -ben; $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ tetszőleges vektorok $\mathbb{R}^m$ -ben. Ekkor $\exists! \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vektortérhomomorfizmus, melyre $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i$ ($i = 1, \dots, n$).

[Biz: !: Tegyük fel, hogy φ jó, s használjuk 1./ és 2./-t. Legyen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$. Ekkor $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1 \mathbf{e}_1 + (x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n)) = \varphi(x_1 \mathbf{e}_1) + \varphi(x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) = \dots = \varphi(x_1 \mathbf{e}_1) + \varphi(x_2 \mathbf{e}_2) + \dots + \varphi(x_n \mathbf{e}_n) = x_1 \varphi(\mathbf{e}_1) + x_2 \varphi(\mathbf{e}_2) + \dots + x_n \varphi(\mathbf{e}_n) = x_1 \mathbf{w}_1 + x_2 \mathbf{w}_2 + \dots + x_n \mathbf{w}_n$. $\exists$: Legyen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$. Ekkor $\varphi(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} x_1 \mathbf{w}_1 + x_2 \mathbf{w}_2 + \dots + x_n \mathbf{w}_n$ megfelelő lesz.]

A bevezető példához hasonlóan mátrixokat is használhatunk a vektortérhomomorfizmusok megadására [a baloperátoros írásmódhoz a következő definíció illik]:

DEFINÍCIÓ: Ha $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázis $\mathbb{R}^n$ -ben; $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m$ bázis $\mathbb{R}^m$ -ben; $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vektortérhomomorfizmus, akkor a φ mátrixa az $\mathbf{e}; \mathbf{f}$ bázispárban

$[\varphi]^{\mathbf{e}; \mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} [[\varphi(\mathbf{e}_1)]_{\mathbf{f}}, \dots, [\varphi(\mathbf{e}_n)]_{\mathbf{f}}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

A definícióból adódik, hogy tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $[\varphi(\mathbf{x})]_{\mathbf{f}} = [\varphi]^{\mathbf{e}; \mathbf{f}} [\mathbf{x}]_{\mathbf{e}}$.

DEFINÍCIÓ: $\mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ jelölje a $\mathbb{R}^n$ -ből $\mathbb{R}^m$ -be képező vektortérhomomorfizmusok halmazát.

$\varphi, \psi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ esetén legyen $\varphi + \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ úgy, hogy $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ -re $(\varphi + \psi)(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{u})$. $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ esetén legyen $\lambda \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ úgy, hogy $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ -re $(\lambda \varphi)(\mathbf{u}) = \lambda(\varphi(\mathbf{u}))$.

Könnyen látható, hogy az imént definiált összeg és számszoros is $\mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ -ben van, továbbá az is, hogy $\mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vektortér az $\mathbb{R}$ felett a fenti műveletekre.

Vektortérhomomorfizmusok szorzatát is könnyen definiálhatjuk kompozícióként, csak a baloperátoros írásmód miatt a sorrendre figyelni kell, ezt az indexek jobban mutatják, mint a "kitevők":

DEFINÍCIÓ: Legyen $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}^m$ és $V_3 = \mathbb{R}^s$; $\varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$, $\psi \in \mathcal{H}om(V_2, V_3)$. Legyen $\psi\varphi : V_1 \rightarrow V_3$ úgy, hogy $\mathbf{u} \in V_1$ -re $(\psi\varphi)(\mathbf{u}) = \psi(\varphi(\mathbf{u}))$. Könnyen látható, hogy a definiált $\psi\varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_3)$.

Tapasztaltuk már, hogy az azonos dimenziójú vektorterekkel ugyanúgy tudtunk dolgozni, a magyarázat: van köztük vektortérizomorfizmus (ilyenkor a két vektortér közé $\cong$ jelet teszünk). Bizonyítani fogjuk, hogy $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \dim \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{R}^m$. Előbb még olyan fogalmakat definiálunk, melyek "mérni" tudják, hogy pl. egy $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ mennyire nem izomorfizmus.

DEFINÍCIÓ: Legyen $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

φ képtere: $\mathcal{I}m \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{v}' \mid \mathbf{v}' \in \mathbb{R}^m \exists \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{v}'\}$;

φ magtere: $\mathcal{K}er \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}'\}$.

Jegyezzük meg, hogy $\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(\mathbf{00}) = 0\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$. Könnyen igazolható, hogy $\mathcal{I}m \varphi \subseteq \mathbb{R}^m$ és $\mathcal{K}er \varphi \subseteq \mathbb{R}^n$. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{I}m \varphi = \mathbb{R}^m \Leftrightarrow \varphi$ szürjektív. Mivel $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}' \Leftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathcal{K}er \varphi$, ezért az is igaz, hogy φ injektív $\Leftrightarrow \mathcal{K}er \varphi = \{\mathbf{0}\}$. Később igazolni fogjuk, hogy érvényes a következő **dimenzióösszefüggés**:

$\dim \mathcal{I}m \varphi + \dim \mathcal{K}er \varphi = \dim \mathbb{R}^n$.

[Itt φ rangja: $r(\varphi) = \dim \mathcal{I}m \varphi$; φ defektusa: $d(\varphi) = \dim \mathcal{K}er \varphi$.] Foglalkoztunk már $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképezésekkel. Különösen fontosak lesznek azok a lineáris leképezések, amelyeknél $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$, ezek az $\mathbb{R}^n$ vektortér LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓI. Ilyenkor megállapodunk abban, hogy a mátrix definíciójában mindkét helyre ugyanazt a bázist vesszük: Ha $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázis $\mathbb{R}^n$ -ben, $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció, akkor $[\varphi]^e \stackrel{\text{def}}{=} [\varphi]^{\mathbf{e}; \mathbf{e}}$.

Nemsokára majd bebizonyítjuk, hogy egy $\mathbb{R}$ feletti vektortér lineáris transzformációjának különböző bázisokban vett mátrixai hasonlóak $\mathbb{R}$ felett. Most vizsgáljuk meg, mennyire nagy szerencse egy n dimenziós vektortér φ lineáris transzformációjához olyan bázist találni, amelyben a mátrixa diagonális: az $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ bázisnak azt kell tudnia, hogy $\varphi(\mathbf{e}'_i) = \lambda_i \mathbf{e}'_i$, azaz minden báziselem saját számszorosába képeződjön. Persze, $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, de a $\mathbf{0}$ nem lehet báziselem! Ha síkon ($n = 2$) a kezdőpont körüli $+90^\circ$ -os forgatást nézzük, erről belátható, hogy lineáris transzformáció, de egyetlen nullvektortól különböző vektort sem visz a saját számszorosába, nemhogy egy bázist. Először tehát azt kellene tisztázni, mikor van egyáltalán jó vektor (kis szerencse), aztán ilyenekből bázis (nagy szerencse).

DEFINÍCIÓ: Legyen $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Az $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ **sajátvektora** φ -nek, ha

1./ $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$,

2./ $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : \varphi(\mathbf{u}) = \lambda_0 \mathbf{u}$.

Ilyenkor a λ_0 az $\mathbf{u}$ sajátvektorhoz tartozó sajátértéke a φ -nek.

Legyen $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázis $\mathbb{R}^n$ -ben; $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$; $A = [\varphi]^e$. $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ esetén

λ_0 sajátértéke φ -nek $\Leftrightarrow \exists \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \neq \mathbf{0} : \varphi(\mathbf{u}) = \lambda_0 \mathbf{u} \Leftrightarrow$

$\exists \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \neq \mathbf{0} : [\varphi(\mathbf{u})]_e = \lambda_0 [\mathbf{u}]_e \Leftrightarrow \exists \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \neq \mathbf{0} : [\varphi]^e [\mathbf{u}]_e = \lambda_0 [\mathbf{u}]_e \Leftrightarrow$

$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : A\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{x} \Leftrightarrow \lambda_0$ jobb oldali sajátértéke A -nak $\Leftrightarrow |A - I_n \lambda_0| = 0$.

Próbálkozhatunk φ karakterisztikus polinomjának definíciójával is: $k_\varphi(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} k_{[\varphi]^e}(\lambda)$, de felmerül a kérdés, hogy értelmes-e (nem függ-e a bázis választásától)? Szerencsére nincs gond, hisz φ különböző bázisokban vett mátrixai $\mathbb{R}$ felett hasonlóak, azt pedig már bizonyítottuk, hogy hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik.

Következőnek elégséges feltételt adunk SB létezésére a különböző sajátértékű sajátvektorok függetlenségének igazolása révén.