# Analízis EA 1

Késtem 20 percet

Nem tudom, mikor kezdődött. Valószínűleg egészkor. (18:00)

(…) Nehéz definiálni egyes fogalmakat.

Digitális világgal foglalkozóknak nem kell foglalkoznia az analóggal. (Szerintem igen.)

Példák:

EEG, EKG analóg jelek digitális feldolgozása.

ABS jelek analógok, de a fedélzeti számítógép digitálisra konvertált jelekkel foglalkozik.

A világ rég óta létezett analóg technikákkal. Műszereink analógok.

A digitális módszerek jó része analóg adaptáció.

Nem csak az infósok kínzására van ez a tantárgy. Van valami értelme is. (Mi?)

Szellemi erőfeszítés kell hozzá, úgy, mint a testedzéshez. Jutalma, hogy megértjük ezeket a dolgokat. Ha értjük, meg is tudjuk tanulni.

Folytonosság definícióját például nem bemagolni, hanem megérteni kell.

Ez volt a bevezetés. Most csapjunk bele!

## Valós számok halmaza

Jele:

Két művelet van rajta.

### Összeadás

Kommutatív () és asszociatív ().

Létezik neutrális elem, a 0. a+0=0 minden a-ra

Létezik inverz elem. Egyértelműen létezik minden a-ra egy -a, hogy a+ -a=0

### Szorzás.

Kommutatív és asszociatív.

Létezik neutrális elem, az 1. 1\*a=a minden a-ra.

Létezik inverz elem. Egyértelműen létezik minden a-ra egy 1/a vagy a^-1, hogy a\* 1/a=1

### Disztributivitás

Köti össze a szorzást az összeadással.

a(b+c)=ab+ac minden abc-re.

Ez egy test.

Rendezési reláció.

Teljes rendezés, minden a,b esetén a<=b vagy b<a

Ha a<=b és b<=a akkor a=b

Anti szimmetria.

A valós számokra van számegyenes.

Síkon van rendezés?

Beleilleszkedik a test struktúrába.

Ha a<=b és c természetes számok esetén következik, hogy a+c<=b+c

Ha c>=0, akkor ac<=bc.

Ez a két tulajdonság az, ami a rendezést összeköti a műveletekkel. Ettől rendezett test. A rendezés integrálódik a műveletekkel. (Tehát nem függetlenek tőle.)

A valós számok tuják ezt. De ha valami más ugyanezt tudja, akkor az is automatikusan valós szám? Nem. Ez nem teljes jellemzés.

Van egy axióma, egy ettől teljesen független tulajdonság. Nem triviális.

Dedekind axióma.

Racionális számok halmazának teljessé tétele lesz később. \sqrt(2), \pi, stb

Van két valós számok halmaza.

Egyik sem üres.

Mnden a eleme A és b eleme B esetén a<=b (A halmaz bármelyik eleme kisebb B bármelyik eleménél.)

==> létezik c valós szám, amelyre: minden a eleme A a<=c és minden b eleme B c<=b

A halmaz összes eleme kisebb c-nél, ő maga kisebb B minden eleménél.

## Korlátos halmaz

(…)

Definíció:

Az A felülről korlátos halmaz, ha létezik olyan c eleme A, hogy a<=c minden a eleme A-nak.

Ekkor a c-t az A egy felsőkorlátjának nevezzük.

Az A alulról korlátos halmaz, ha létezik olyan c eleme A, hogy a>=c minden a eleme A-nak.

Akkor c-t az A egyik alsókorlátjának nevezzük.

Az A halmaz korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.

Számegyenesen ez könnyen látszik.

Hogy van ez a síkban? Egy dimenzióban a rendezés (<=) segítségével vezettük be. Ilyen <= nincs a síkban. Majd erre visszatérünk.

## Szuprémum létezése

Felülről korlátos halmaznak végtelen sok felső korlátja van. Ha az a felső korlát, akkor az a+1 is felső korlát, a+2 is, stb. Ezek között van egy legkisebb felsőkorlát.

TÉTEL: A része R, nem üres,

Ekkor A felsőkorlátjai közül van legkisebb.

Létezik olyan b eleme R, hogy a<=b minden a eleme A. (A b az felsőkorlát.)

És ha c eleme R olyan, hogy a<=c minden a eleme A-ra, akkor b<=c (Ő a legkisebb. Ha c is felsőkorlát, akkor b nála kisebb vagy egyenlő.)

Jelölés: supA

Átfogalmazás: supA=b akkor és csak akkor, ha:

b felsőkorlát: minden (…)

Legkisebb (…) Levonok belőle egy pozitív számot (epszilon). (…) Ellentettje.

Paraméteres egyenlőtlenség lesz gyakorlaton.

### Bizonyítás

A része (…)

A nem üres

A felülről korlátos.

B halmazt definiálunk. elemei: b, akik A felsőkorlátjai

a<=b minden (…)

B az A halmaz felsőkorlátjainak halmaza.

Biztosan nem üres, mert az A felülről korlátos.

(…) teljesítik a dedekind axióma feltételeit. Bárhogyan vehetek a-t az A-ből, b-t a B-ből.

Következésképpen létezik c valós szám, amire igaz, hogy a<=c minden a eleme A esetén, vagyis c az A felsőkorlátja. c az A minden eleménél nagyobb egyenlő.

Másrészt c<=b minden b eleme B. (Ez van a Dedekind axiómában)

Ez a felsőkorlátjainak halmaza. Minden felsőkorlátnál kisebb egyenlő. Tehát c a legkisebb felsőkorlát.

c az A minden felsőkorlátjánál kisebb vagy egyenlő.

E két állítás jelenti azt, hogy c az A legkisebb felsőkorlátja.

## Infimum

HF hasonlóan.

Melyik fogalom általánosítása a szuprémum? A maximum.

Az infimum pedig a minimum.

## Kibővítése

Kibővítjük a valós számok halmazát. R felülvonás. Hozzáveszünk egy fekvőnyolcast (végtelent) és egy negatív végtelent.

Rendezés szempontjából? Mennyi az 1+ végtelen, a -2-végtelen? Most nem foglalkozunk vele.

Pozitív végtelennél minden kisebb egyenlő. Plusz végtelen a legnagyobb elem.

Ideális elem

Mínusz végtelen <= a (…)

Veszek az R felülvonásnak egy részhalmazát, lesz felsőkorlátja? Igen. Minden részhalmaznak lesz.

Jelölés: A része R, a nem üres, A felülről nem korlátos.

Esetén szupA=+végtelen.

Valós számoknak felülről nem korlátos részhalmaza.

Ha supA végtelen, akkor felülről nem korlátos.

A alulról nem korlátos: infA =-végtelen

## TÉTEL: Természetes számok halmaza felülről nem korlátos.

Bizonyítás: TFH N felülről korlátos. Ekkor létezik szupN=c, ami valós szám. A c a legkisebb felsőkorlát. Ebből következik, hogy c-1 nem felső korlátja N-nek. Azaz létezik n természetes szám, hogy c<n-1. (Nem c+1<n?) Ebből következik, hogy c<n Ez természetes szám, azaz c nem felsőkorlát. Ellentmondásra jutottam. Bizonyítás vége.

A rendezés és az összeadás kapcsolatát használtuk ki a bizonyításhoz. <= helyett <

## Archimédesz tétele

a és b valós számok, a<0 ebből következik, hogy létezik n, hogy n\*a>b

Bizonyítás:

Ha b negatív, akkor könnyű. b <=0 esetén n=1 megfelel. b<0<=1\*a=a

n\*a>b === n>b/a (Pozitív számmal oszthatok.)

Mivel N felülről nem korlátos, azaz b/a nem felső korlátja N-nek, ebből következik, hogy létezik olyan (…)

### Következmények

(…)

## Cantor féle közösrész tétel

Kell hozzá a:

### Zárt intervallum fogalma

(…)

### Nyílt intervallum

…

### Cantor féle közösrész tétel

 Legyen korlátos zárt intervallum. Ha

akkor a metszet nem üres:

Egymásba skatulyázott zárt intervallumok metszete nem üres.

Ha zárt helyett nyílt intervallumokat veszek, akkor a tétel nem lesz igaz. Például: ]0,1/n[ nyílt halmazok.

### Bizonyítás

Legyen a bal végpontok halmaza és a jobb végpontok halmaza.

Ekkor

Valóban;

Ha : egyre szűkebb intervallumok.

Ha : egyre szűkebb intervallumok.

Teljességi axióma miatt ∃ξ (xi) elválasztó elem.

Bizonyítás teljes indukcióval.

1. (…)
2. …
3. … <= … <=… lásd feltétel

Ahogy az indexet növelem, a számok (b?) csökkennek.

Létezik c valós, hogy a\_n<=…<= b(…) minden természetes szám esetén.

Egymásba skatulyázott zárt intervallumok.

Bal és jobb végpontokból képezek egy-egy halmazt

(…)

Bármilyen két elemet veszek, a\_n<=b\_n.

# Függvények

Descartes szorzat és a reláció fogalmát ismerjük.

## Függvény fogalma

A és B nem üres halmazok.

 reláció függvény, ha

Nincs benne két olyan rendezett pár, amelyre azonos első elem esetén különböző második elem.

## Értelmezési tartomány

## Értékkészlet

## Függvényérték

 függvényérték.

## Jelölések

Invertálható, Kompozíció jövő héten.

Előadás vége: 17:45

(Szünet: nincs, egybe tartjuk)