Geometriai algoritmusok

Horváth Gyula
horvath@inf.elte.hu

Számos olyan gyakorlati számítási probléma van, amely megoldható olyan geometriai modellben, amelyben csak egyszerű objektumok, pontok, egyenesek, szakaszok, szögek, szögtartományok, poligonok szerepelnek. Ilyen alapfeladatokat vizsgálunk.

1. Alapfogalmak

Pont: $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Megjegyzés: Csak olyan feladatkat tekintünk, ahol a pontok koordinátái mindig egész számok, és a megoldásához nem kell lebegőpontos aritmetikát használni.

Szakasz

Legyen p_1, p_2 pont. A p_1 és p_2 pont által meghatározott szakasz:

$\overline{p_1\,p_2} = \{p = (x,y) : x = \alpha\, p_1.x + (1-\alpha) p_2.x,\ y = \alpha\, p_1.y + (1-\alpha)\, p_2.y),\ \alpha \in \mathbb{R},\ 0 \leq \alpha \leq 1\}$

Ha p_1 és p_2 sorrendje számít, akkor irányított szakaszról beszélünk, jele: $\overrightarrow{p_1\,p_2}$.

Egyenes

Egyenes megadása:

1. $y = mx + b$ egyenlettel: azon (x,y) pontok halmaza, amelyekre teljesül az egyenlet.
2. $ax + by + c = 0$ egyenlettel.
3. Egyenes megadása két pontjával: $e(p_1, p_2)$

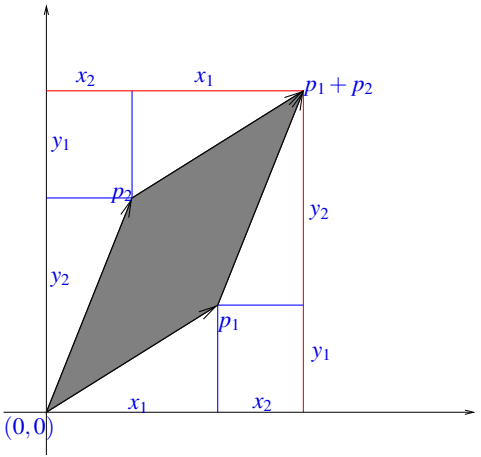
Pontok ábrázolására a

```
1 typedef struct{
2   int x,y;
3   int azon;
4 }Pont;
```

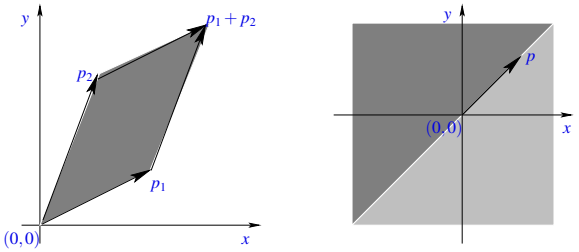
típust használjuk, ahol p.azon a pont azonosítója, vagy sorszáma a feladatleírás szerint.

1.1. Forgásirány

Gyakran előfordul, hogy a síkon adott p_1 és p_2 pontra el kell dönteni, hogy a p_1 ponthoz képest a p_2 pont milyen forgásirányba esik. Tekintsük a 3. ábrán látható p_1 és p_2 vektorokat. A $p_1 \times p_2$ **keresztszorzat** a $(0,0), p_1, p_2$ és $p_1 + p_2 = (p_1.x + p_2.x, p_1.y + p_2.y)$ pontok által alkotott paralelogramma előjeles területeként értelmezhető.



1. ábra. A paralelogramma előjeles területe:
$T = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - x_1y_1 - x_2y_2 - x_2y_1 - x_2y_1 =$
$x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_2y_1 - x_2y_1 = x_1y_2 - x_2y_1$

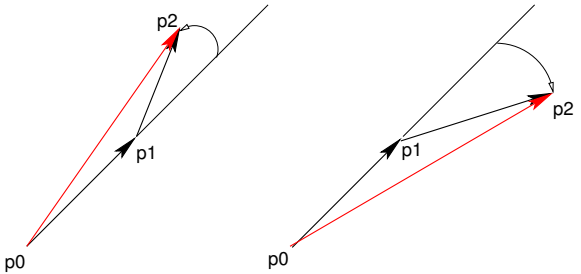


2. ábra. (a) A p_1 és p_2 vektorok keresztszorzata a paralelogramma előjeles területe. (b) A világos tartomány azokat a pontokat tartalmazza, amelyek a p-től órajárással egyező irányba esnek, a sötétebb pedig azokat, amelyek órajárással ellentétes irányba esnek p-től.

$$\begin{aligned} p_1 \times p_2 &= \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ &= -p_2 \times p_1 \ . \end{aligned}$$

$p_1 \times p_2 > 0 \Leftrightarrow p_2$ az órajárással ellentétes irányban van p_1-hez képest.
$p_1 \times p_2 = 0 \Leftrightarrow$ a $(0,0)$, p_1 és p_2 pontok egy egyenesre esnek (kollineárisak).
$p_1 \times p_2 < 0 \Leftrightarrow p_2$ az órajárás irányban van p_1-hez képest.
Még általánosabban, adott két csatlakozó irányított szakasz, $\overrightarrow{p_0 p_1}$ és $\overrightarrow{p_1 p_2}$. Milyen irányba fordul

$\overrightarrow{p_1p_2}$ a $\overrightarrow{p_0p_1}$-hez viszonyítva?
A válasz $(p_1 - p_0) \times (p_2 - p_0) = (p_1.x - p_0.x)(p_2.y - p_0.y) - (p_2.x - p_0.x)(p_1.y - p_0.y)$ keresztszorzat előjele alapján megadható.



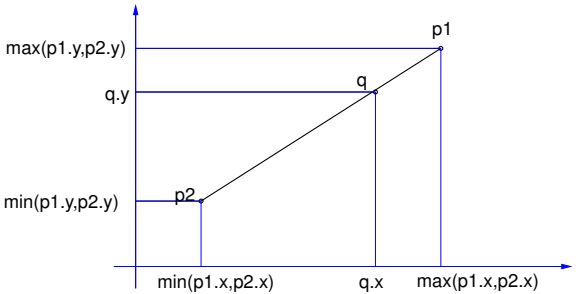
3. ábra. Csatlakozó szakaszok forgásiránya.

$(p_1 - p_0) \times (p_2 - p_0) > 0$: $\overrightarrow{p_1p_2}$ balra fordul,
$(p_1 - p_0) \times (p_2 - p_0) = 0$: $\overrightarrow{p_0p_1}$ és $\overrightarrow{p_1p_2}$ kollineárisak,
$(p_1 - p_0) \times (p_2 - p_0) < 0$: $\overrightarrow{p_1p_2}$ jobbra fordul.

```
1  int ForgasIrany(Pont P0,Pont P1,Pont P2){
2  /*
3  Kimenet: +1 ha P1->P2 balra fordul,
4            0 ha P0,P1 és P2 kollineárisak,
5           -1 ha P1->P2 jobbra fordul.
6  */
7     long long Kereszt=(long long)(P1.x-P0.x)*(P2.y-P0.y)
8                      -(long long)(P2.x-P0.x)*(P1.y-P0.y);
9     if (Kereszt<0)
10       return -1;
11    else if (Kereszt>0)
12       return 1;
13    else
14       return 0;
15 }
```

1.2. Szakaszon

Annak eldöntése, hogy a P_1 és P_2 pontok által megadott szakaszon van-e a Q pont.



4. ábra. A q pont a $\overline{p_1\,p_2}$ szakaszra esik, ha p_1, p_2 és q kollineárisak és $min(p_1.x, p_2.x) \leq q.x \leq max(p_1.x, p_2.x)$ és $min(p_1.y, p_2.y) \leq q.y \leq max(p_1.y, p_2.y)$.

```
1 bool Szakaszon(Pont P1, Pont P2, Pont Q){
2 //Kimenet: akkor és csak akkor Igaz, ha a Q pont a P1–P2 szakaszon van
3     return ((P1.x–Q.x)*(P2.y–Q.y)–(P2.x–Q.x)*(P1.y–Q.y)==0) &&
4             Kozte(P1,P2,Q);
5 }
```

1.3. Közel

Annak eldöntése, hogy a kollineáris P_0, P_1, P_2 pontok esetén P_1 közelebb van-e P_0-hoz, mint P_2:

```
1 bool Kozel(Pont P0,Pont P1,Pont P2){
2 //Feltétel: (P0,P1,P2) kollineáris
3 //Kimenet: P1 közelebb van P0-hoz, mint P2
4    return (abs(P1.x-P0.x)<abs(P2.x-P0.x)) ||
5           (abs(P1.y-P0.y)<abs(P2.y-P0.y)) ;
6 }
```

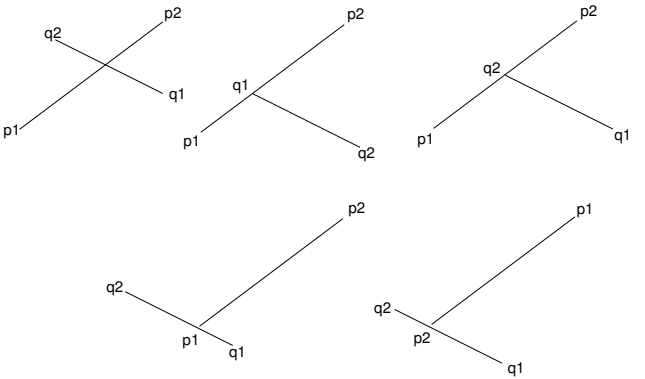
1.4. Közte

Annak eldöntése, hogy a kollineáris P_1, P_2, Q pontok esetén a Q pont a $\overline{P_1P_2}$ szakaszon van-e

```
1 bool Kozte(Pont P1,Pont P2,Pont Q){
2 //Feltétel: (P1,P2,Q) kollineáris
3 //Kimenet: P1 közelebb van P0-hoz, mint P2
4    return   (abs(P1.x-Q.x)<=abs(P2.x-P1.x)) &&
5             (abs(P2.x-Q.x)<=abs(P2.x-P1.x)) &&
6             (abs(P1.y-Q.y)<=abs(P2.y-P1.y)) &&
7             (abs(P2.y-Q.y)<=abs(P2.y-P1.y)) ;
8 }
```

1.5. Metsző szakaszpárok

Eldöntendő, hogy metszi-e egymást adott $\overline{p_1p_2}$ és $\overline{q_1q_2}$ szakasz?



5. ábra. Szakaszpárok metszésének öt lehetséges esete.

```
1 bool SzakaszParMetsz(Pont P1,Pont P2, Pont Q1,Pont Q2 ){
2   int fpq1,fpq2,fqp1,fqp2;
3   fpq1=ForgasIrany(P1,P2, Q1);   fpq2=ForgasIrany(P1,P2, Q2);
4   fqp1=ForgasIrany(Q1,Q2, P1);   fqp2=ForgasIrany(Q1,Q2, P2);
5   return fpq1*fpq2<0 && fqp1*fqp2<0 ||
6          Szakaszon(P1,P2, Q1) || Szakaszon(P1,P2, Q2) ||
7          Szakaszon(Q1,Q2, P1) || Szakaszon(Q1,Q2, P2);
8 }
```

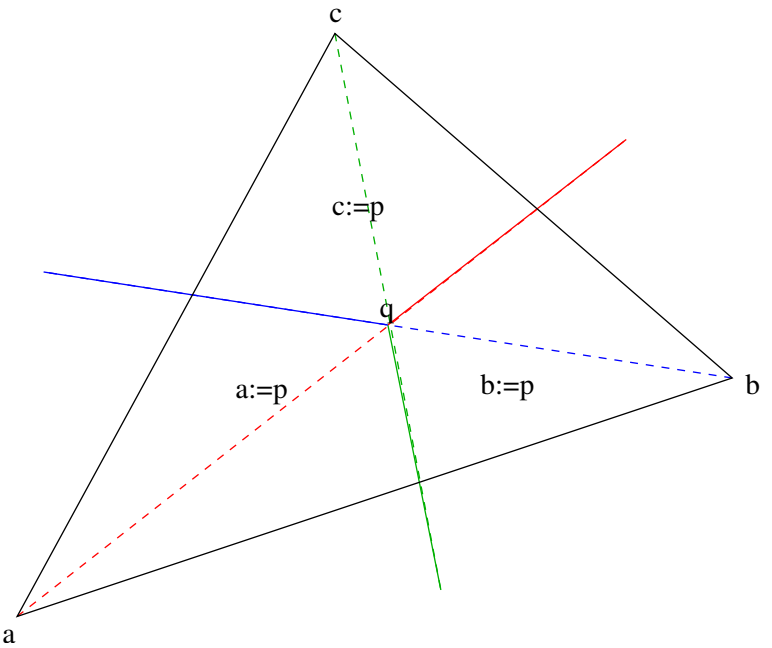
2. Feladat: Bekerítés

Adott a síkon a $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ ponthalmaz és egy $q (q \notin P)$ pont. Határozzunk meg három olyan $a, b, c \in P$ pontot, hogy a q pont az $\triangle(a,b,c)$ háromszögbe, vagy oldalára esik, de a P ponthalmaz egyetlen más pontja sem esik a $\triangle(a,b,c)$ háromszögbe, vagy oldalára!

Megoldás.

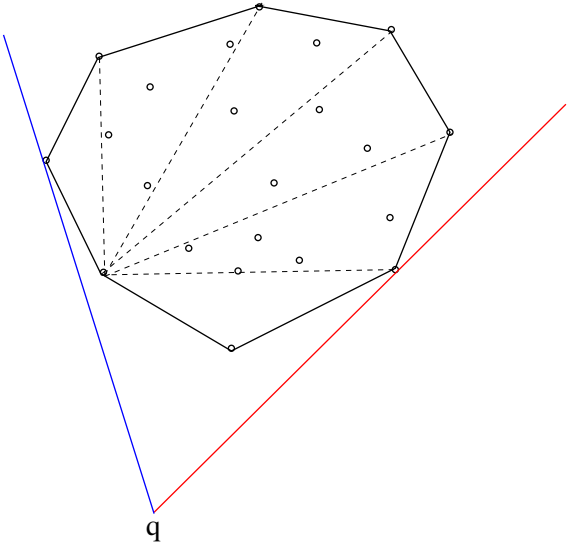
1. Állítás. Ha van olyan (tetszőleges) $a, b, c \in P$ pont, hogy q az $\triangle(a,b,c)$ háromszögbe, vagy oldalára esik, akkor ez finomítható úgy, hogy a feltétel teljesüljön.

2. Állítás. Akkor és csak akkor van megoldás, ha a q pont a P ponthalmaz konvex burkán belül, vagy



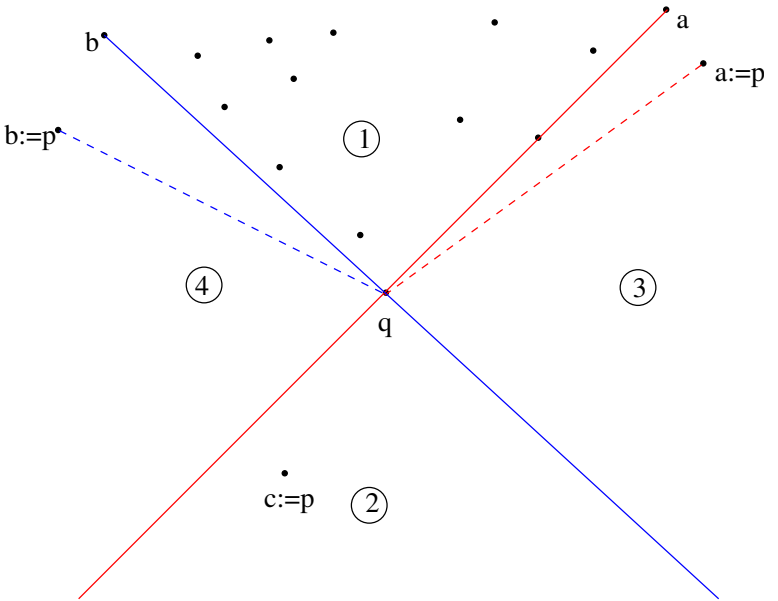
6. ábra. A háromszög finomítása. Minden $p \in P$ pontra, amely az $\triangle(a,b,c)$ háromszögbe, vagy oldalára esik, $q \in \triangle(a,b,p)$, vagy $q \in \triangle(b,c,p)$ vagy $q \in \triangle(c,a,p)$ teljesül.

oldalán van. A konvex burok előállítása nélkül, gyorsan (lineáris időben) kereshető három olyan



7. ábra.

$a, b, c \in P$ pont, hogy $q \in \triangle(a,b,c)$. Legyen $a := p_1$, majd keressünk olyan $b \in P$ pontot, hogy a, b és q nem esik egy egyenesre. Ha nincs ilyen b pont, akkor nincs megoldás.
Ezután minden $p \in P$ pontra ($p \neq a, p \neq b$) határozzul meg, hogy a (q,a) és (q,b) egyenesek által meghatározott síknegyedek melyikébe esik p.
Ha nem a 2. esettel ért véget a keresés, akkor nincs megoldás, mert minden pont $\overrightarrow{qa}$-tól balra és $\overrightarrow{qb}$-től jobbra van.



8. ábra. Az eddig vizsgált pontok a $\triangleleft(b,q,a)$ tartományba esnek. Újabb p pont esetén:

1. eset. $ForgasIrany(q,a,p) \geq 0$ és $ForgasIrany(q,b,p) \leq 0$: nem módosul semmi.
2. eset. Egyébként, ha $ForgasIrany(q,a,p) \leq 0$ és $ForgasIrany(q,b,p) \geq 0$: $c := p$ és vége.
3. eset. Egyébként, ha $ForgasIrany(q,a,p) < 0$: $a := p$.
4. eset. Egyébként, (ha $ForgasIrany(q,b,p) > 0$): $b := p$.

```
1  void Kerito3(Pont P[], int n, Pont q, int A, int B, int C){
2  /*
3   Bemenet: P ponthalmaz, q pont
4   Kimenet:
5   (i,0,0) ha P minden pontja az e(q,P[i]) egyenesre esik
6   (a,b,0) ha q a P konvex burkán kívül van, és ekkor
7           az e(q,P[a]) és e(q,P[b]) a két érintő egyenes
8   (a,b,c) ha q a P konvex burkán belül van, és ekkor
9         (P[a],P[b],P[c]) olyan háromszög, hogy q a háromszögben vagy oldalá
10        és P egyetlen pontja sem esik a háromszögbe, sem oldalára.
11 */
12   int firqa,firqb,firqc;
13   int i,j;
14   Pont aP,bP,cP;
15
16   aP=P[1]; i=2;
17   while (i<=n && ForgasIrany(q,aP,P[i])==0) i++;
18   if (i>n){//pontjai egy egyenesre esnek
19      A=1;B=0;C=0;
20      exit;
21    }
```

```
22  bP=P[i]; cP.azon=0;
23    if (ForgasIrany(q,aP,bP)<0){//q–aP–tól bP balra essen
24      aP=bP; bP=P[0];
25    }
26    for (j=1; j<=n; j++){
27      firqa=ForgasIrany(q,aP,P[j]);
28      firqb=ForgasIrany(q,bP,P[j]);
29      if (firqa<0 && firqb>=0 || firqa<=0 && firqb>0){//2.eset
30        cP=P[j]; break;
31      } else if (firqa<0 && firqb<0){//3.eset
32        aP=P[j];
33      } else if (firqa>0 && firqb>0){//4.eset
34        bP=P[j];
35      } //else 1. eset, nincs mit tenni, sem aP, sem bP nem vátozik
36    }
37  //ha cP.azon=0, akkor q kivül van, és ekkor e(q,aP) és e(q,bP) érintő egyen
38    if (cP.azon==0){
39      A=aP.azon; B=bP.azon; C=0;
40      exit;
41    }
```

```
42  //Az (aP,bP,cP) háromszög tartalmazza a q pontot, finomítás:
43    for (i=1; i<=n; i++){
44      if (P[i].azon!=aP.azon && P[i].azon!=bP.azon && P[i].azon!=cP.azon &&
45          (ForgasIrany(aP,bP,P[i])>=0)&&(ForgasIrany(bP,cP,P[i])>=0)&&(Forgas
46              firqa=ForgasIrany(q,aP,P[i]);
47              firqb=ForgasIrany(q,bP,P[i]);
48              firqc=ForgasIrany(q,cP,P[i]);
49              if (ForgasIrany(q,aP,bP)==0 && ForgasIrany(P[i],aP,bP)==0){
50                if  (firqc>0) aP=P[i]; else bP=P[i];
51              } else if (ForgasIrany(q,bP,cP)==0 && ForgasIrany(P[i],bP,cP)==
52                if  (firqa>0) bP=P[i]; else cP=P[i];
53              } else if (ForgasIrany(q,cP,aP)==0&& ForgasIrany(P[i],cP,aP)==0
54                if  (firqb>0) cP=P[i]; else aP=P[i];
55              } else{
56                if (firqb<=0 && firqc>=0)
57                  aP=P[i];
58                else if (firqa>=0 && firqc<=0)
59                  bP=P[i];
60                else
61                  cP=P[i];
62              }
63          }
64     }
65    A=aP.azon; B=bP.azon; C=cP.azon;
66  }
```

3. Feladat: Pont helyzetének megállapítása.

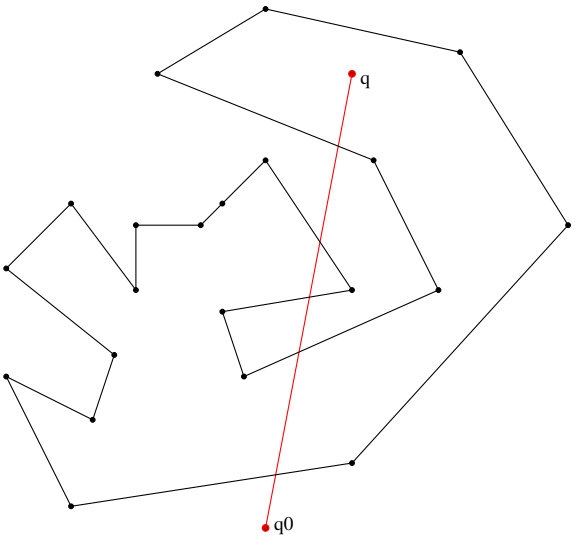
Adott a síkon egy zárt, nem-metsző poligon a csúcsainak $p_1, \ldots, p_n$ órajárással ellentétes felsorolásával és adott egy q pont. Eldöntendő, hogy a q pont a poligon belsejéhez tartozik-e? A poligon valamely oldalára eső pont nem belső pontja a poligonnak.

Megoldás

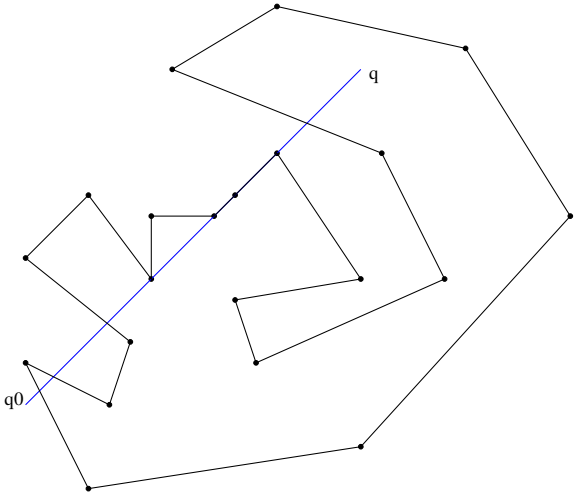
Válasszunk egy olyan q_0 pontot, amely biztosan nem tartozik a poligon belsejéhez és a poligon egyetlen csúcsa sem esik a $\overline{q_0 q}$ szakaszra, legfeljebb ha q megegyezik valamelyik csúccsal. (Van ilyen pont.)

Ha a $\overline{q_0 q}$ szakasz a poligon páratlan számú oldalát metszi, akkor q belső pont, egyébként külső.

A q_0 külső pont választása.

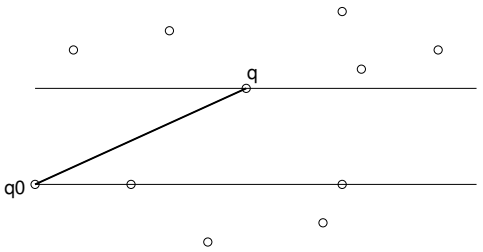


9. ábra. A $\overline{q_0 q}$ szakasz a poligon páratlan sok oldalát metszi, tehát belső pont.



10. ábra. A poligonnak több csúcsa is a $\overline{q_0\, q}$ szakaszra esik.

Legyen $q_0.y = \max\{p_i.y | p_i.y < q.y, i = 1, \ldots n\}$ és $q_0.x = \min\{p_i.x | i = 1, \ldots n\} - 1$.
Ha a poligonnak nincs olyan csúcspontja, amelynek y-koordinátája kisebb, mint $q.y$, akkor q biztosan külső pont. A $q0$ pont ilyen választása esetén legfeljebb a q pont esik a poligon valamelyik oldalára.



11. ábra. A q_0 pont választása:
$q_0.y = \max\{p_i.y | p_i.y < q.y, i = 1, \ldots n\}$ és $q_0.x = \min\{p_i.x | i = 1, \ldots n\} - 1$.

Ezt az esetet külön ellenőrizzük. Egyébként, a poligon bármely $\overline{p_i\, p_{i+1}}$ oldalának akkor és csak akkor van közös pontja a $\overline{q_0\, q}$ szakasszal, ha p_i és p_{i+1} az $e(q_0, q)$ egyenes különböző oldalára esik és a q_0 és q pont az $e(p_i, p_{i+1})$ egyenes különböző oldalára esik. Ez a feltétel a FORGÁSIRANY eljárás felhasználásával egyszerűen kiszámítható:

```
(ForgasIrany(P[i],P[ii],q0)*ForgasIrany(P[i],P[ii],Q)<0) And
(ForgasIrany(q0, Q, P[i])*ForgasIrany(q0, Q, P[ii]) <0 )
```

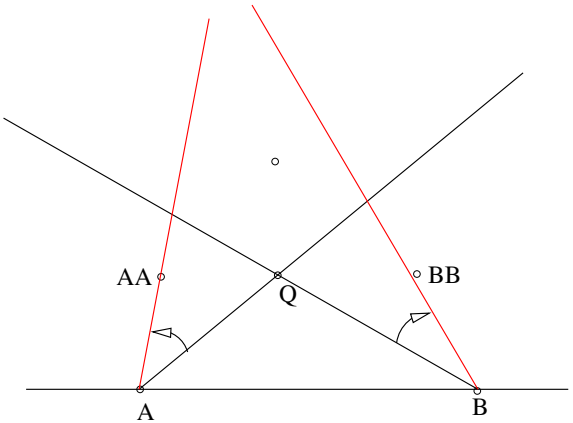
```
1  int Ponthelyzete(Pont P[], int n, Pont Q){
2  /*
3  Kimenet: -1 ha Q a poligon belsejében van,
4           0  ha az oldalán,
5           1  ha kivül van
6  */
7      long long y0,x0;
8      int  i,ii,metsz;
9      Pont q0;
10
11   y0=Q.y; x0=P[0].x;
12   for (i=1; i<=n; i++){//külső pont választás
13     if (P[i].y<Q.y && (P[i].y>y0 || y0==Q.y ) )
14       y0=P[i].y;
15    if (P[i].x<x0)  x0=P[i].x;
16   };
17   if (y0==Q.y)//Q kölső pont
18     return 1;
19
20   q0.y=y0; q0.x=x0-1; //q0 a külső pont
```

```
21    metsz=0;
22    for (i=1; i<=n; i++) {
23      ii=(i+1) % n;
24      if (Szakaszon(P[i], P[ii], Q) ) return 0;
25      if (ForgasIrany(P[i],P[ii],q0)*ForgasIrany(P[i],P[ii],Q)<0 &&
26          ForgasIrany(q0, Q, P[i])*ForgasIrany(q0, Q, P[ii]) <0 )
27        metsz++;
28    };
29    if (metsz %2 ==1)
30      return -1;
31    else
32      return 1;
33  }// Ponthelyzete
```

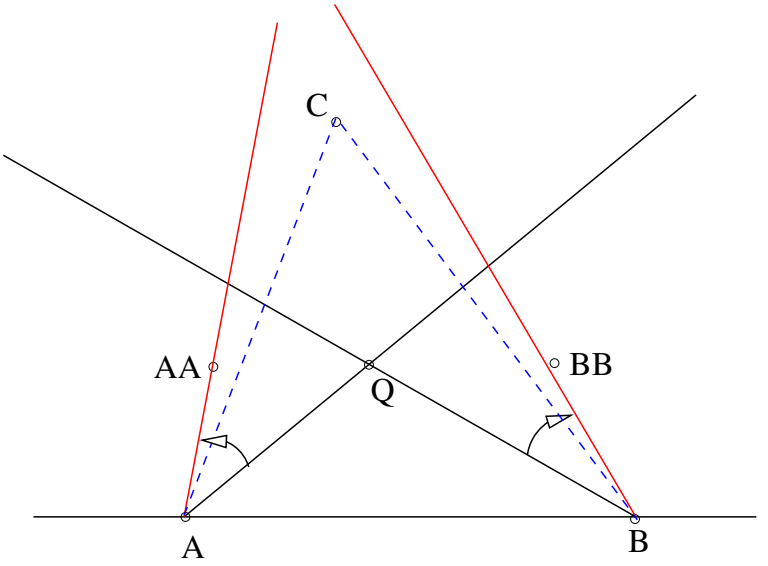
A algoritmus futási ideje legrosszabb esetben is a poligon csúcsainak n számával arányos, tehát $O(n)$.

4. Feladat: IOI Válogató 2006

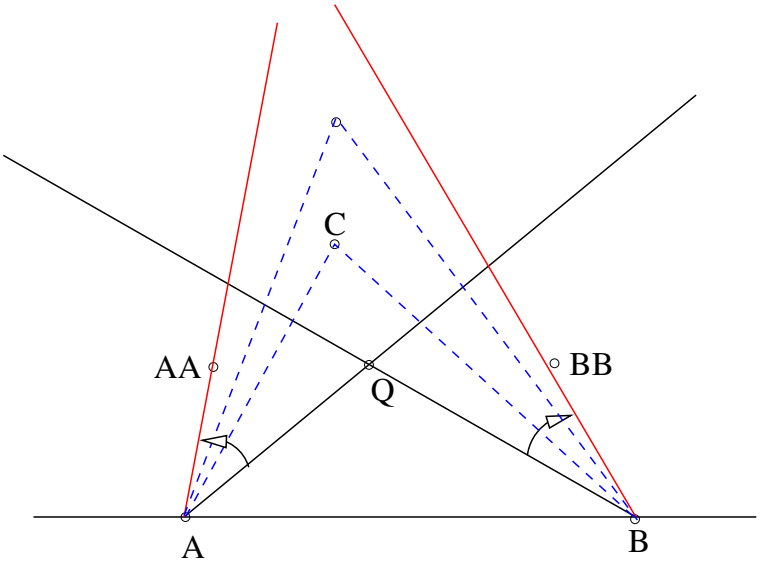
Adott a síkon egy P ponthalmaz és két kitüntetett pontja; A és B. Adott továbbá egy Q pont. Kiszámítandó a P ponthalmaz egy olyan C pontja, hogy a Q pont az $\triangle(A,B,C)$ háromszög belsejében van (nem eshet az oldalára sem), és a P ponthalmaz egyetlen más pontja sem esik a háromszögbe (oldalára sem eshet).
Követelmény: $O(n)$ futási idejű algoritmus.



12. ábra.



13. ábra.



14. ábra.

```
1  int HaromPont(Pont P[], int n, Pont A, Pont B, Pont Q){
2     int FirAB,FirBQ,FirQA,FirAAA,FirBBB,FirAC,FirBC;
3     Pont AA, BB, C;
4    AA.azon=0; BB.azon=0; C.azon=0;
5    for ( int i=1; i<=n; i++){//AA és BB meghatározása
6        if (P[i].azon==A.azon || P[i].azon==B.azon) continue;
7        FirAB= ForgasIrany(A,B,P[i]);
8        FirBQ= ForgasIrany(B,Q,P[i]);
9        FirQA= ForgasIrany(Q,A,P[i]);
10       if (FirAB>=0 && FirBQ>=0 &&  FirQA>=0)
11          return 0;
12
13       if (FirAB>0 && FirQA<0 && FirBQ>0)
14          if (AA.azon==0 || ForgasIrany(A,AA,P[i])<0)
15            AA=P[i];
16
17       if (FirAB>0 && FirQA>0 && FirBQ<0)
18          if (BB.azon=0 || ForgasIrany(B,BB,P[i])>0)
19            BB=P[i];
20   };
```

```
21    for (int i=1; i<=n; i++){// egy C meghatározása
22        if (P[i].azon==A.azon || P[i].azon==B.azon || P[i].azon==AA.azon || P
23        if (AA.azon>0) FirAAA= ForgasIrany(A,AA,P[i]);
24        if (BB.azon>0) FirBBB= ForgasIrany(B,BB,P[i]);
25        FirQA= ForgasIrany(Q,A,P[i]);
26        FirBQ= ForgasIrany(B,Q,P[i]);
27        if ((AA.azon==0 || FirAAA<0) && (BB.azon==0 || FirBBB>0) &&
28              FirQA<0 && FirBQ<0){
29          C=P[i];
30          break;
31        };
32    };
33    if (C.azon==0) return 0;
34    for (int i=C.azon+1; i<=n; i++){// C finomítása
35        if (P[i].azon==A.azon || P[i].azon==B.azon || P[i].azon==AA.azon || P
36        FirAB= ForgasIrany(A,B,P[i]);
37        FirAC= ForgasIrany(A,C,P[i]);
38        FirBC= ForgasIrany(B,C,P[i]);
39        if (FirAB>0 && FirAC<0&& FirBC>0) C=P[i];
40    };
41    return C.azon;
42  }
```

5. Feladat: Pontok összekötése zárt, nem-metsző poligonná.

Adott a síkon n darab pont, amelyek nem esnek egy egyenesre. A pontok (x,y) koordinátáikkal adottak, amelyek egész számok. A pontokat a $1,\ldots,n$ számokkal azonosítjuk. Kössünk össze pontpárokat egyenes szakaszokkal úgy, hogy olyan zárt poligont kapjunk, amelyben nincs metsző szakaszpár. Egy ilyen zárt, nem-metsző poligon megadható a pontok azonosítóinak egy felsorolásával: a felsorolásban egymást követő pontokat kötjük össze egyenes szakaszokkal, továbbá, az utolsót az elsővel is összekötjük.

Bemenet

A `poligon.be` szöveges állomány első sora a pontok $n\,(3 < n < 1000)$ számát tartalmazza. A további n sor mindegyike két egész számot tartalmaz, egy pont x és y koordinátáit, $(-20000 \leq x,y \leq 20000)$. A pontok nem esnek egy egyenesre.

Kimenet

A `poligon.ki` szöveges állományba a bemenetre kiszámított zárt, nem-metsző poligont leíró sorozatot kell kiírni.

Példa bemenet és kimenet

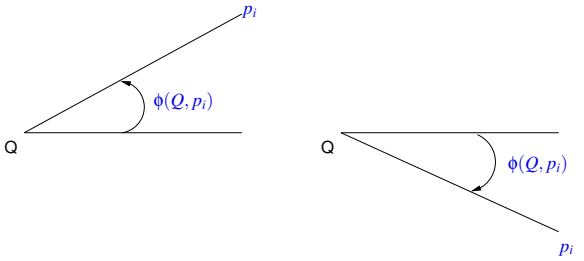
bemenet	kimenet
6 2 0 1 4 0 2 3 2 2 4 2 6	3 1 4 5 6 2

Megoldás

Válasszuk ki a legkisebb x-koordinátájú pontot, ha több ilyen van, akkor ezek közül válasszuk a legkisebb y-koordinátájút. Ezt nevezzük (bal-alsó) sarokpontnak és jelöljük Q-val. Húzzunk (fél) egyenest a Q sarokpontból minden ponthoz.

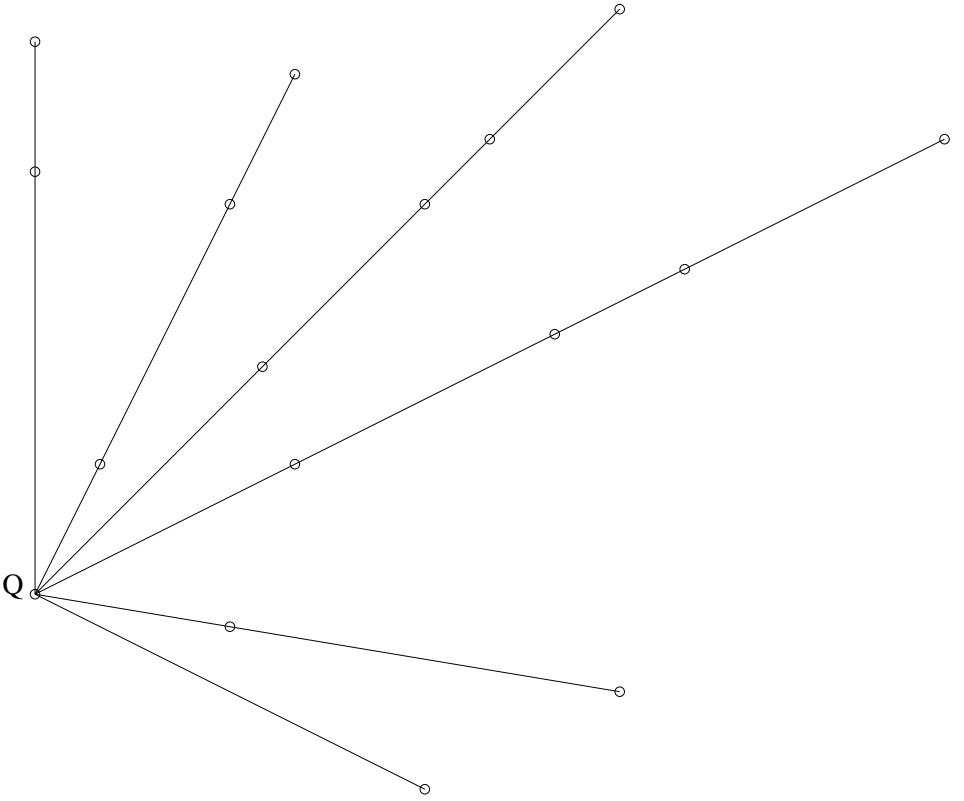
Rendezzük az egyeneseket a Q ponton áthaladó, x-tengellyel párhuzamos egyenessel bezárt (előjeles) szög alapján.

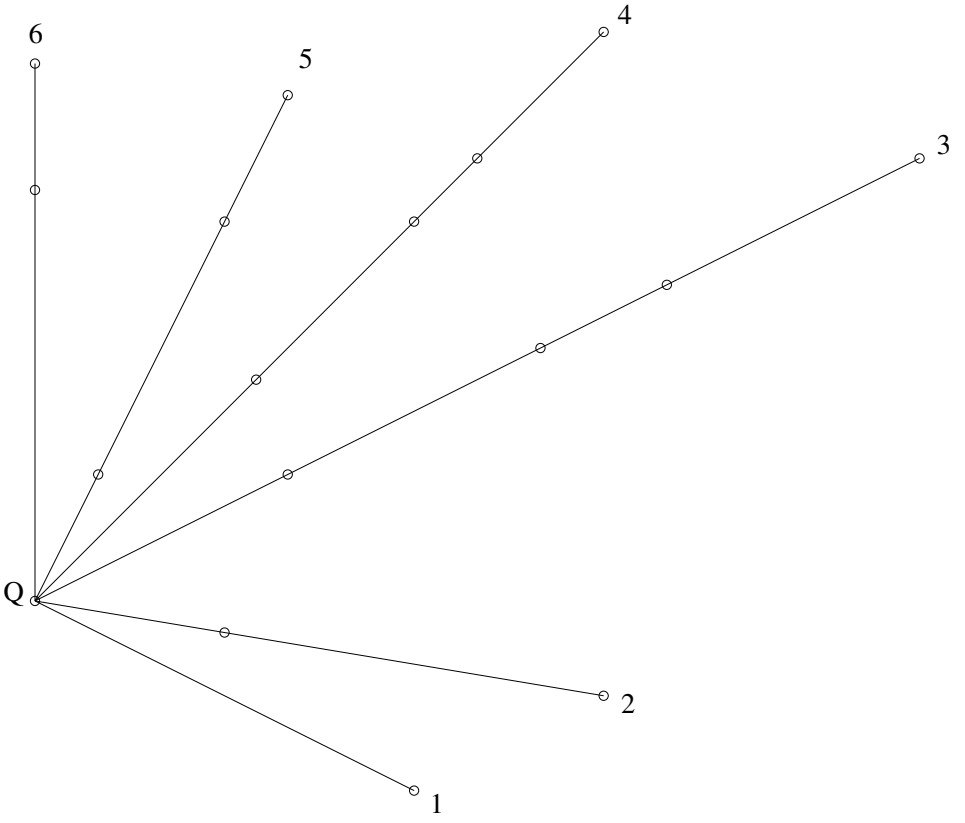
Rendezzük a pontokat úgy, hogy a Q sarokpont legyen az első, és p_i előbb legyen mint p_j akkor és

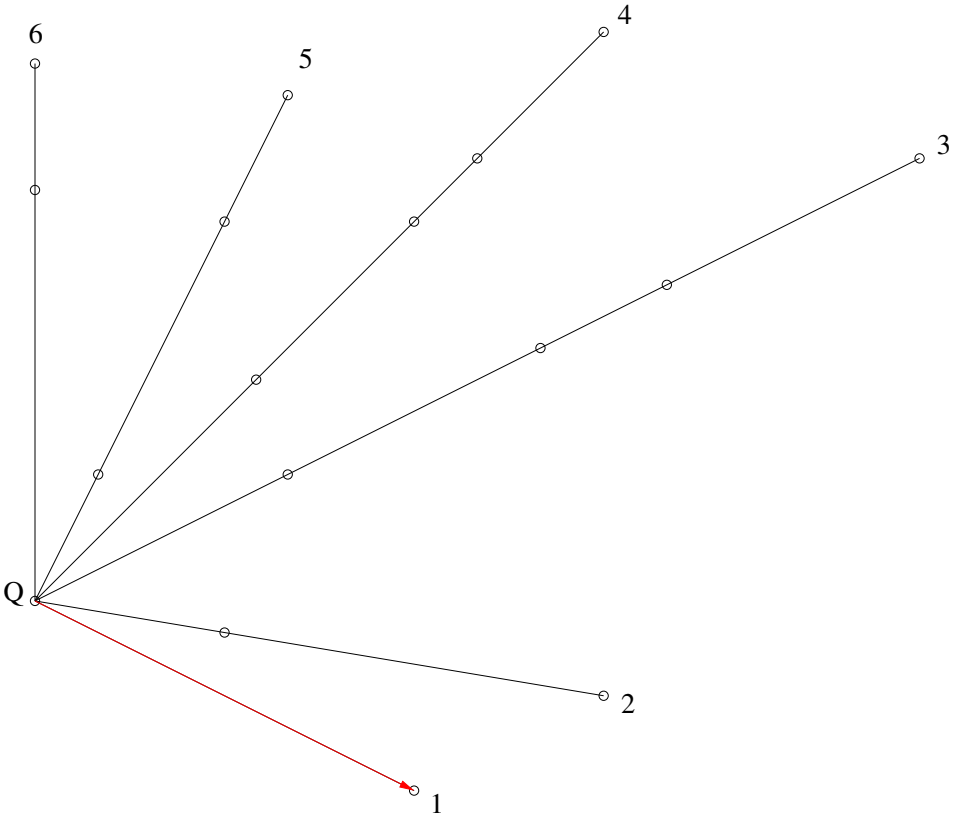


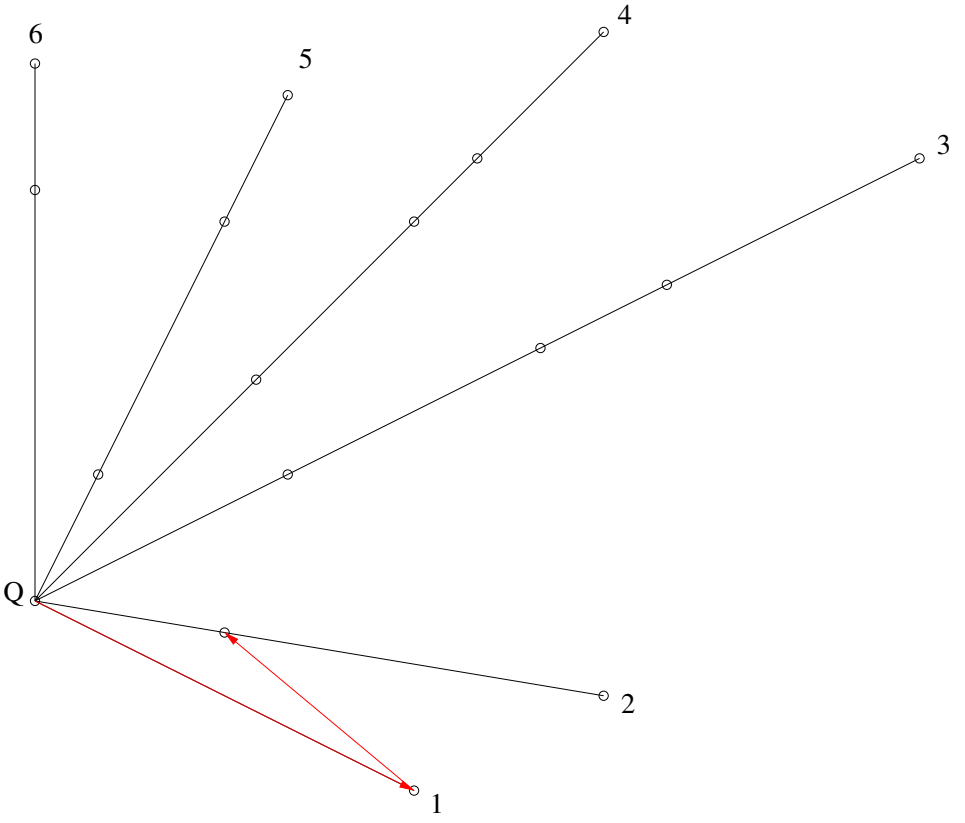
15. ábra. A p_i ponthoz tartozó előjeles szög: $\phi(Q,p_i)$.

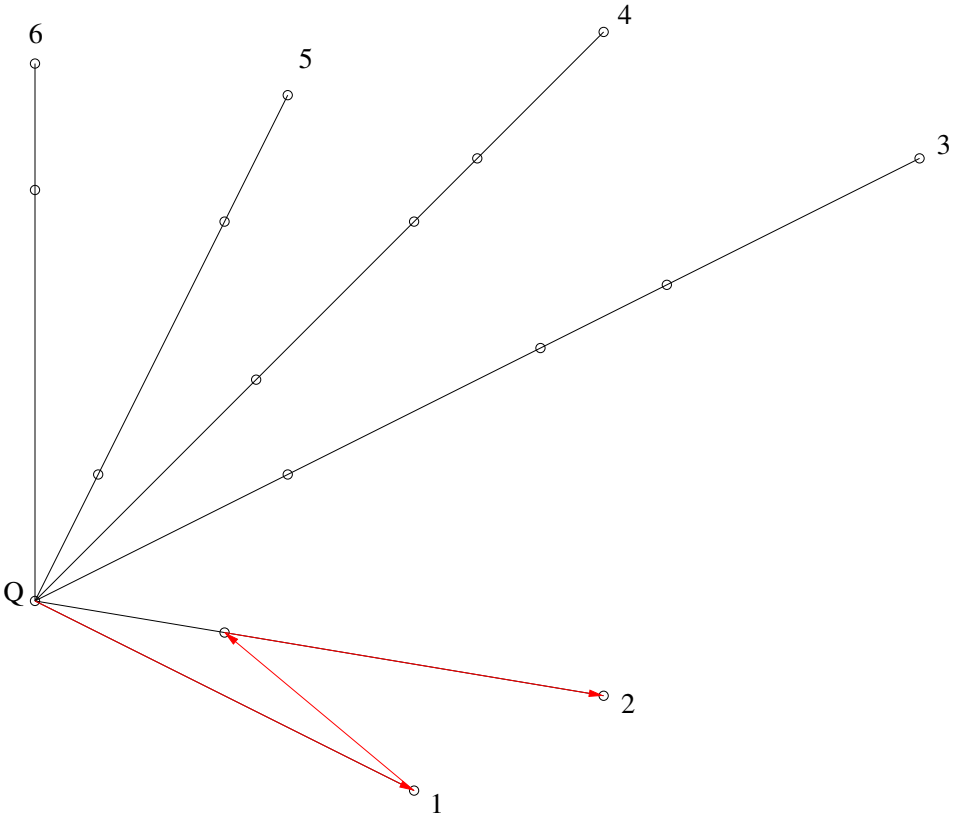
csak akkor, ha
A $\phi(Q,p_i) < \phi(Q,p_j)$, vagy
$\phi(Q,p_i) = \phi(Q,p_j)$ és p_i közelebb van Q-hoz, azaz $p_i.x < p_j.x$, vagy
$\phi(Q,p_i) = \phi(Q,p_j)$ és $p_i.x = p_j.x$ és $p_i.y < p_j.y$.
Ha ebben a sorrendben kötjük össze a pontokat, kivéve, hogy az utolsó egyenesen lévő pontokat fordított sorrendben vesszük, akkor egy zárt, nem metsző poligont kapunk.

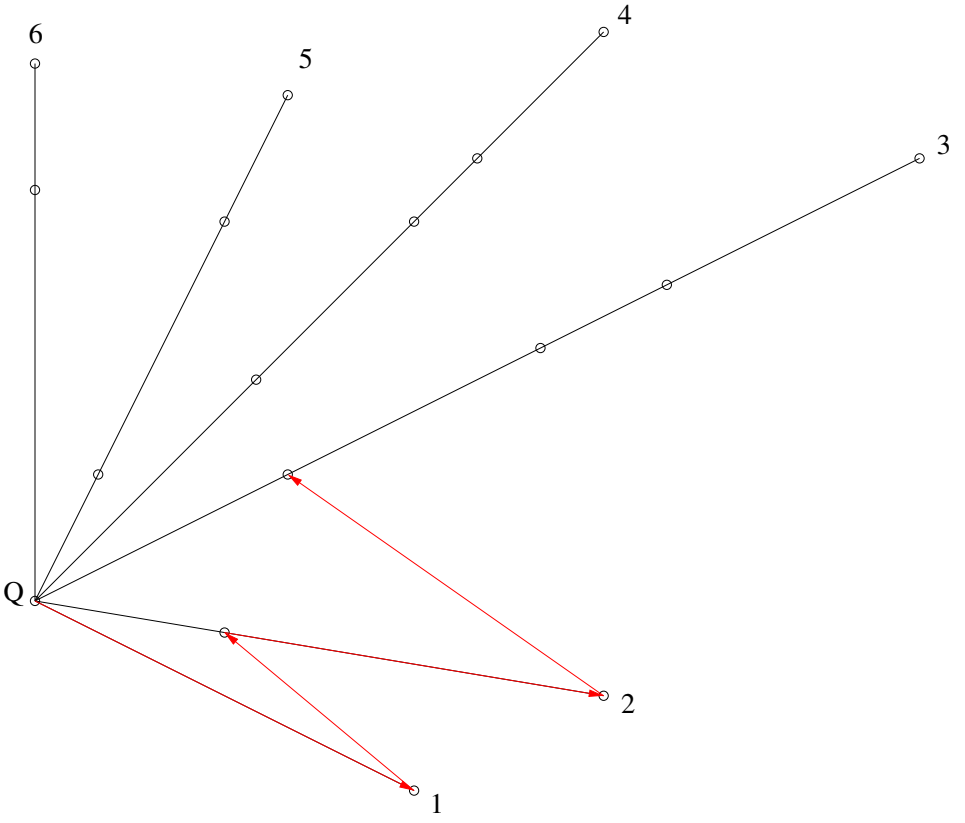

Q

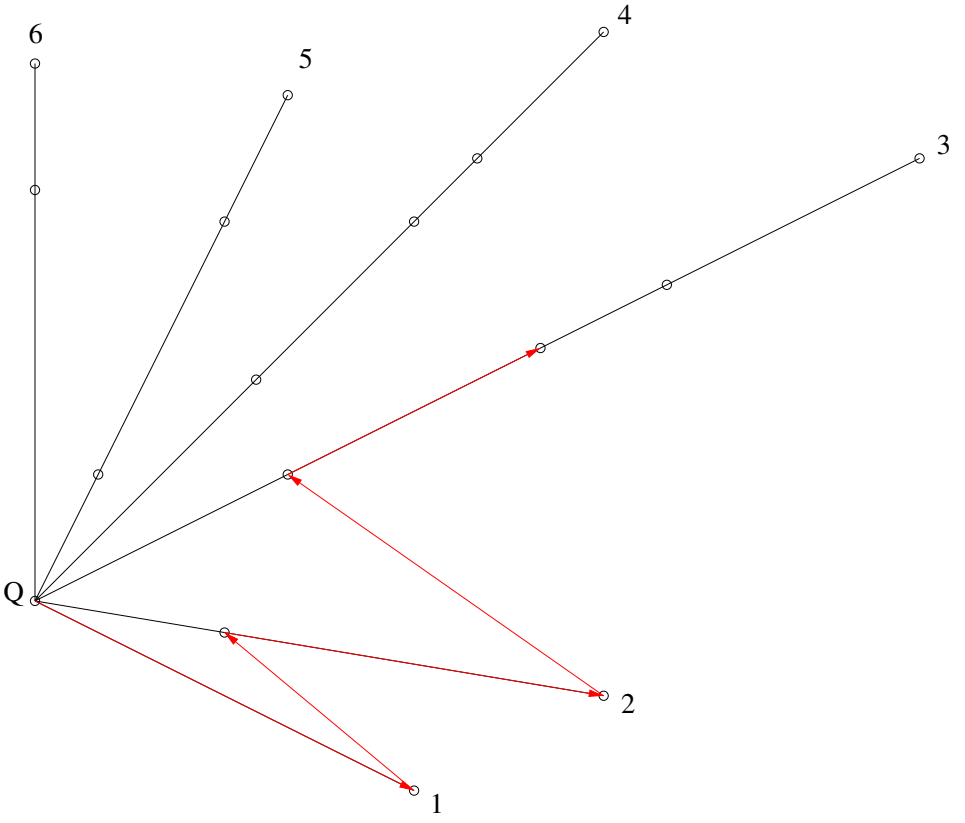

6
5
4
3
Q
2
1

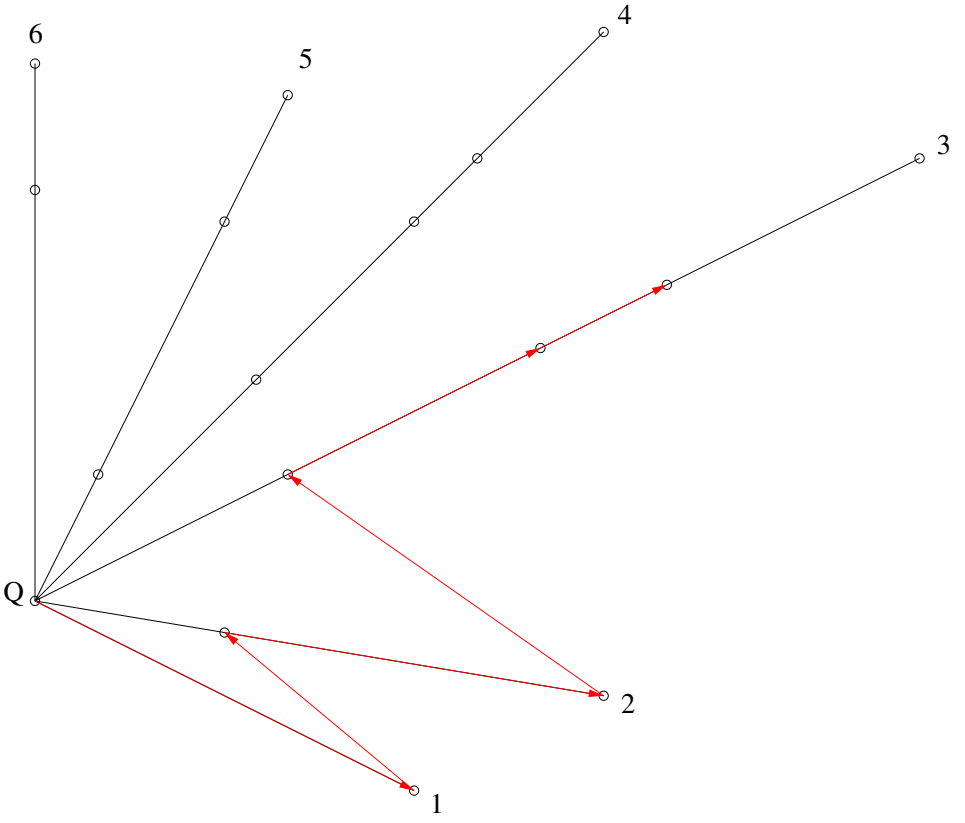

6
5
4
3
Q
2
1

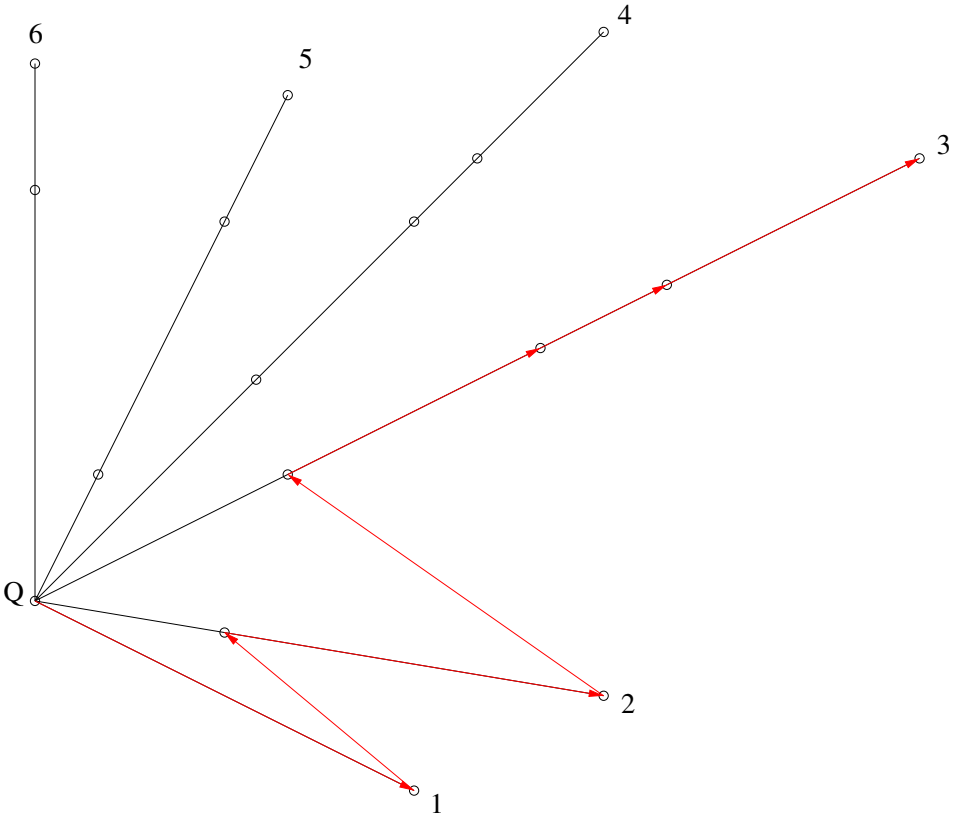

6
5
4
3
Q
2
1

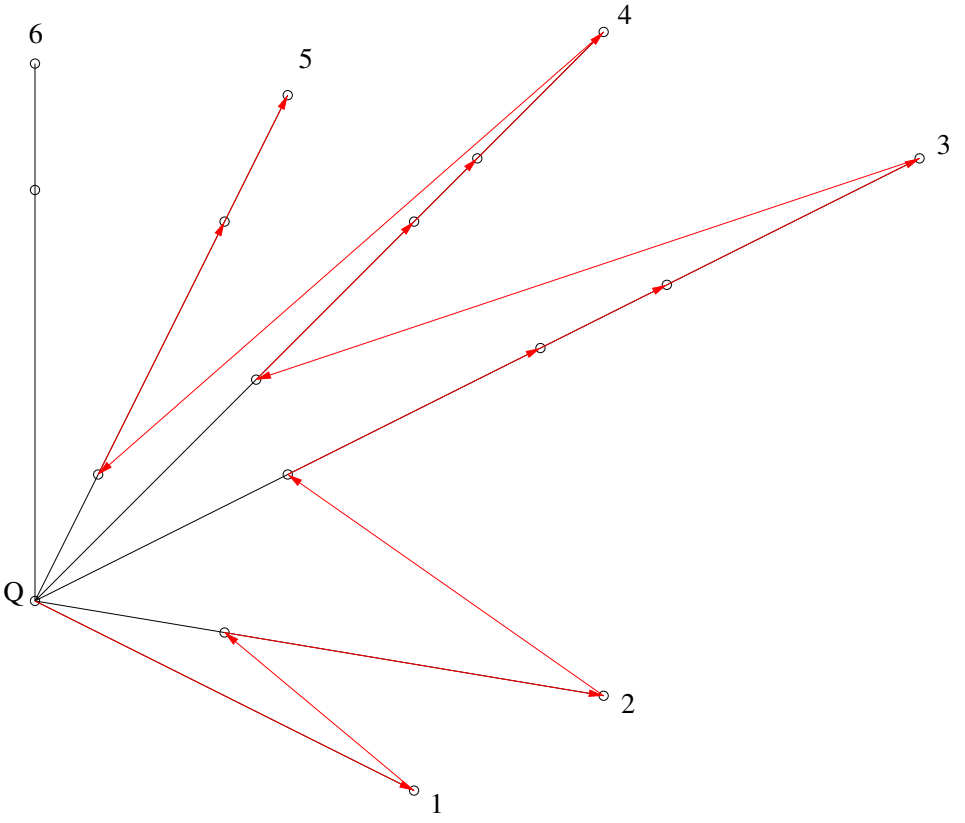

6
5
4
3
Q
2
1

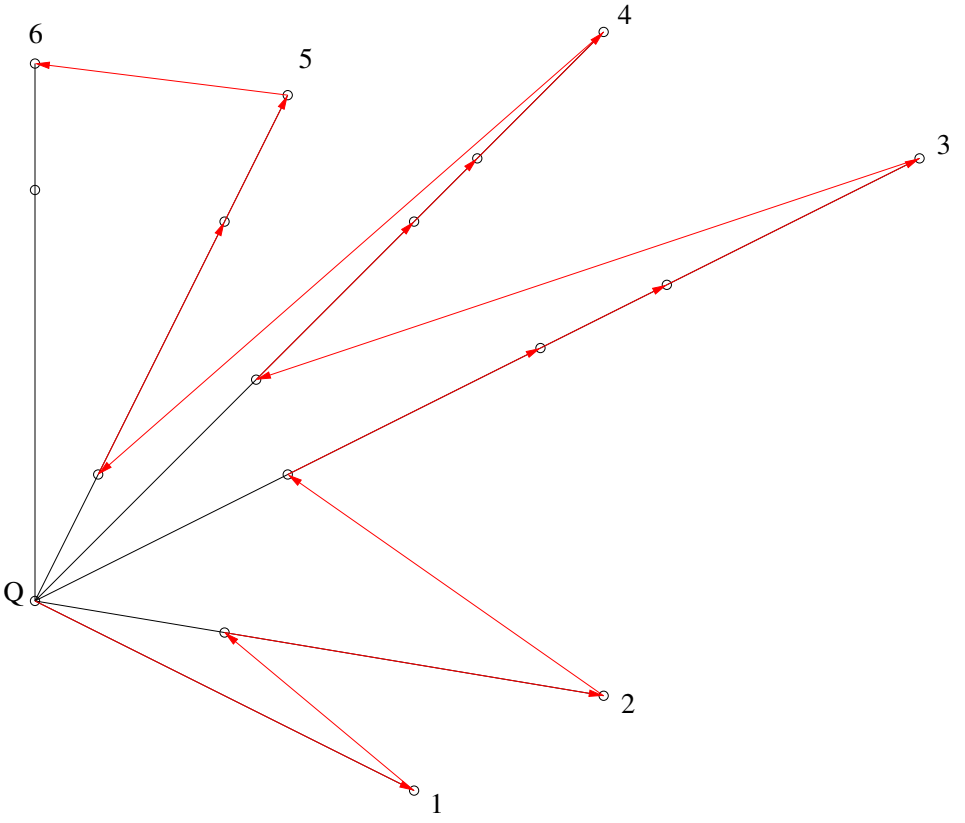

6
5
4
3
Q
2
1

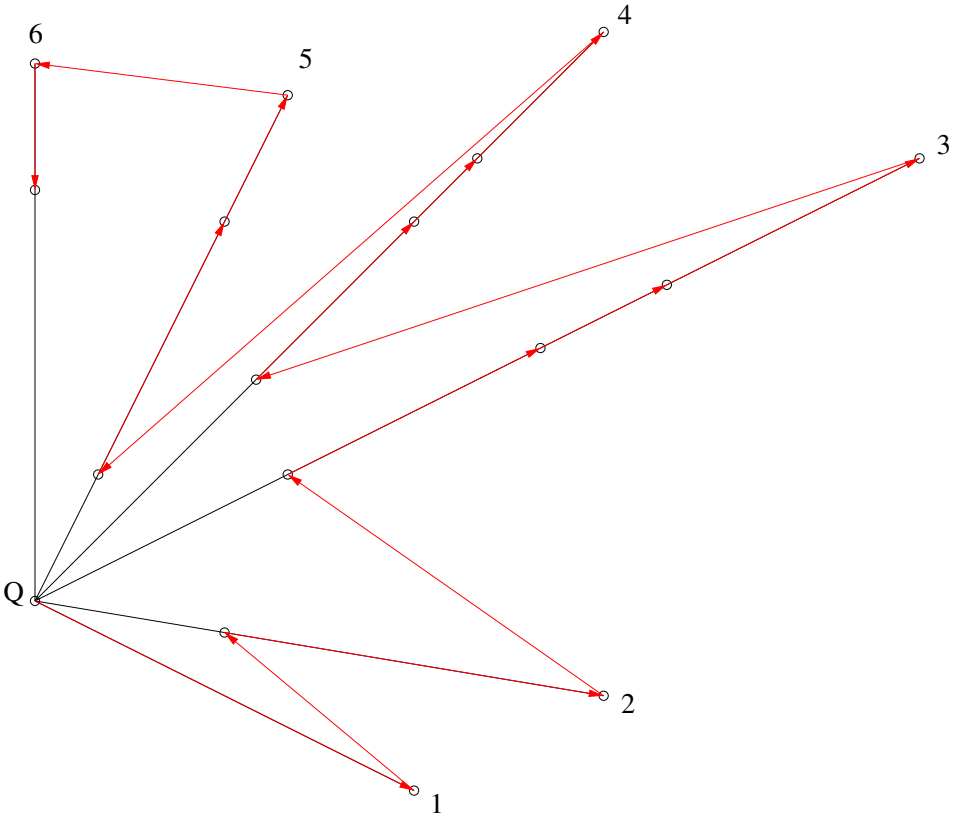

6
5
4
3
Q
2
1

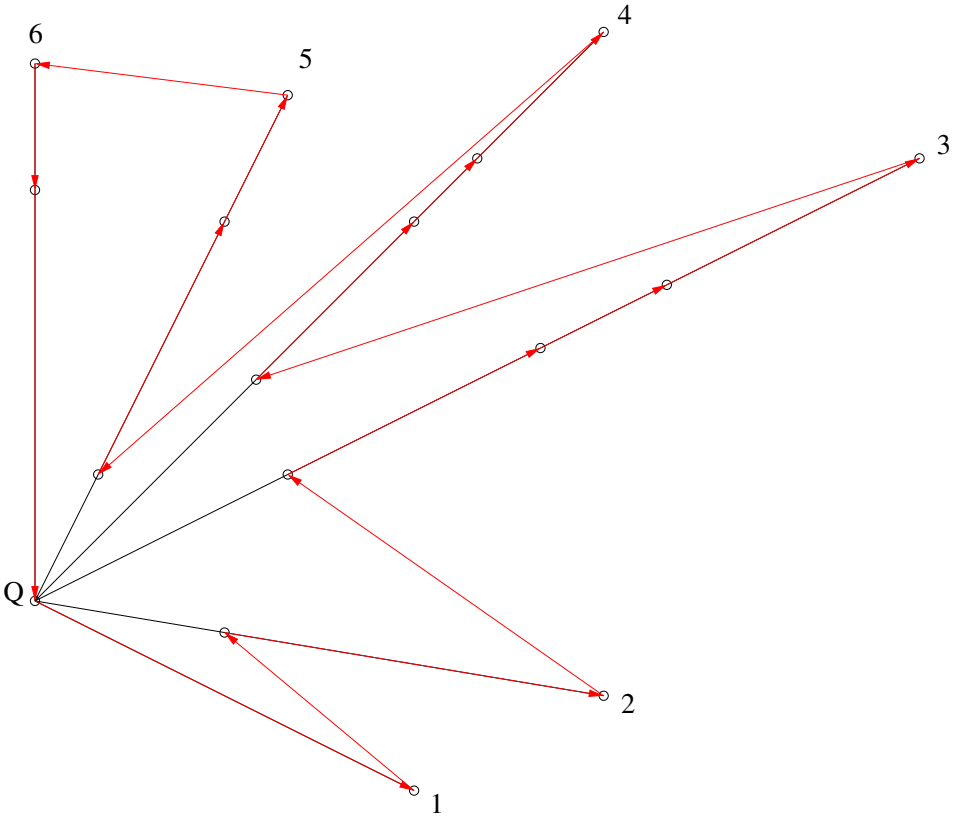

6
5
4
3
Q
2
1


6
5
4
3
Q
2
1

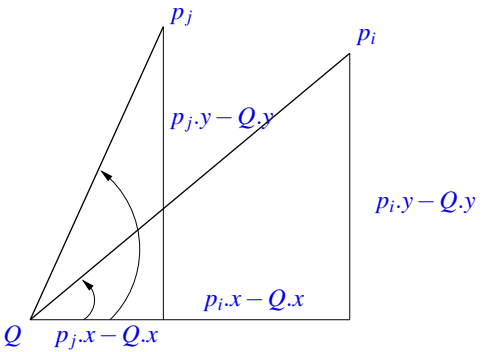

6
5
4
3
Q
2
1


6
5
4
3
Q
2
1


6
5
4
3
Q
2
1


6
5
4
3
Q
2
1

Hogyan dönthető el, hogy $\phi(Q,p_i) < \phi(Q,p_j)$?
Minden $i > 1$-re $-\frac{\pi}{2} < \phi(Q,p_i) \leq \frac{\pi}{2}$ és ebben a tartományban a tangens függvény szigorúan monoton



16. ábra. A $\phi(Q,p_i)$ és $\phi(Q,p_j)$ szögek viszonya.

növekvő, tehát
$\phi(Q,p_i) < \phi(Q,p_j)$ akkor és csak akkor, ha

$$\tan(\phi(Q,p_i)) = \frac{p_i.y - Q.y}{p_i.x - Q.x} < \frac{p_j.y - Q.y}{p_j.x - Q.x} = \tan(\phi(Q,p_j))$$

Mivel Q sarokpont, így $p_i.x - Q.x \geq 0$ és $p_j.x - Q.x \geq 0$, tehát

$$\phi(Q,p_i) < \phi(Q,p_j)$$

akkor és csak akkor, ha

$$(p_i.y - Q.y)(p_j.x - Q.x) < (p_j.y - Q.y)(p_i.x - Q.x)$$

Tehát a pontok rendezése: p_i megelőzi p_j-t akkor és csak akkor, ha

$$\begin{aligned}
(p_i.y - Q.y)(p_j.x - Q.x) &< (p_j.y - Q.y)(p_i.x - Q.x) \vee \\
(p_i.y - Q.y)(p_j.x - Q.x) &= (p_j.y - Q.y)(p_i.x - Q.x) \wedge p_i.x < p_j.x \vee \\
(p_i.y - Q.y)(p_j.x - Q.x) &= (p_j.y - Q.y)(p_i.x - Q.x) \wedge p_i.x = p_j.x \wedge p_i.y < p_j.y
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a bal-alsó sarokponthoz viszonyított polárszög szerinti rendezés rendezési relációja megadható a FORGASIRANY és a KOZEL (vagy KOZTE) műveletekkel:

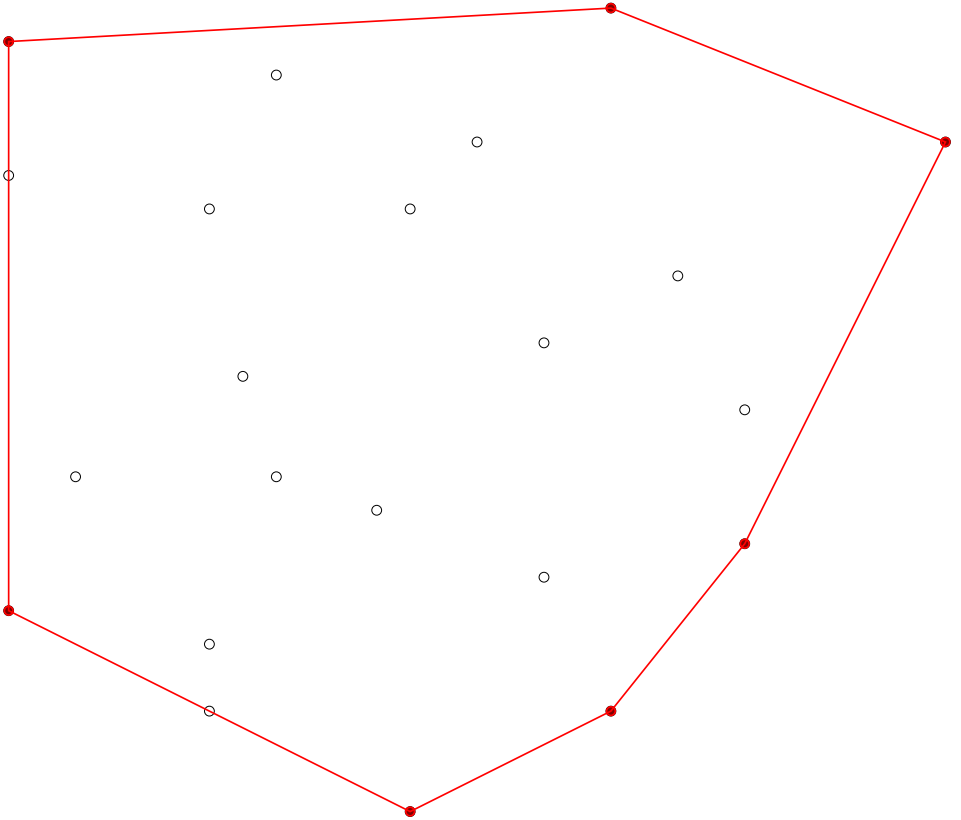
```
1  #include <stdlib.h>
2  #include <stdio.h>
3  #include <iostream>
4  #include <math.h>
5  #include <limits.h>
6  #define maxN 100000
7  using namespace std;
8
9  typedef struct{
10   int x,y;
11   int azon;
12 }Pont;
```

```
13 Pont P[maxN];
14 Pont Q; //sarokpont
15
16 int SarokRend(const void* a, const void* b) {
17   long long ax =((Pont*) a)->x - Q.x;
18   long long ay =((Pont*) a)->y - Q.y;
19   long long bx =((Pont*) b)->x - Q.x;
20   long long by =((Pont*) b)->y - Q.y;
21   if (ax==bx && ay==by) return 0;
22    long long kereszt=ax*by - bx*ay;
23    if (kereszt > 0) return -1;
24    else if (kereszt < 0) return 1;
25    else {
26    if (abs(ax)<abs(bx) || abs(ay)<abs(by))
27       return -1;
28    else
29       return 1;
30    }
31 }
```

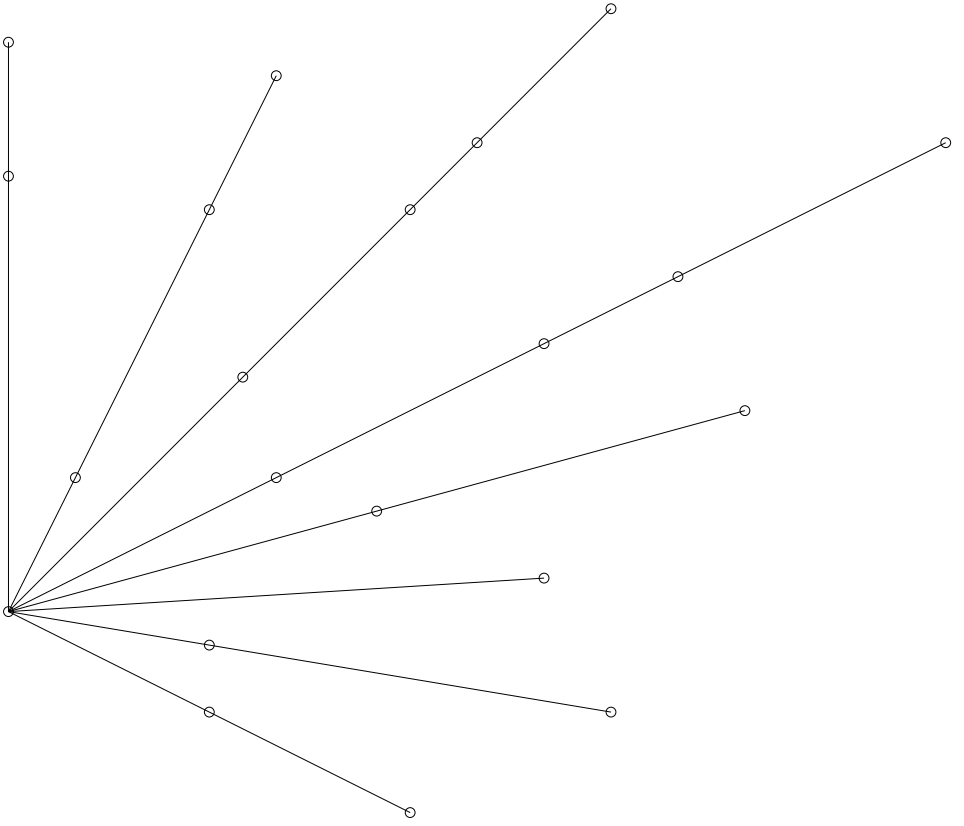
```
32 int main( int argc, char **argv){
33    int n;
34    int x,y, qaz=0;
35    cin>>n;
36    Q.x=INT_MAX;
37    for (int i=0; i<n; i++){
38       cin>>x; cin>>y;
39       P[i].azon=i+1;
40       P[i].x=x; P[i].y=y;
41       if (x<Q.x || x==Q.x && y<Q.y)
42          Q=P[i];
43    }
44    qsort((char *)P, n, sizeof(Pont),  SarokRend);
45    int j=n-2;
46    while (j>0 && (long long)(P[j].x-Q.x)*(P[n-1].y-Q.y)==
47                  (long long)(P[n-1].x-Q.x)*(P[j].y-Q.y)  ) j--;
48    for (int i=0; i<=j; i++)
49       cout<<P[i].azon<<" ";
50    for (int i=n-1; i>j; i--)
51       cout<<P[i].azon<<" ";
52 }
```

6. Ponthalmaz konvex burka

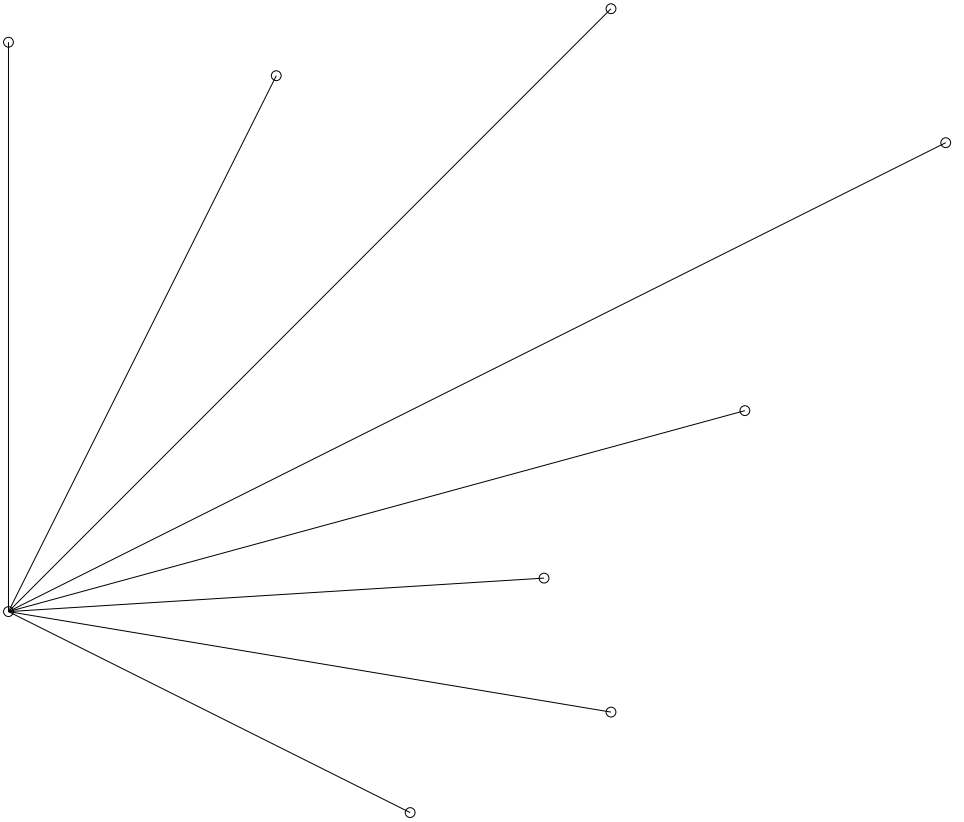
Definíció. Egy egyszerű (nem metsző) poligon konvex, ha bármely két belső pontját összekötő szakasz minden pontja a poligon belsejében, vagy határán van.
Definíció. Egy $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ ponthalmaz konvex burka az a legszűkebb Q konvex poligon, amely a ponthalmaz minden pontját tartalmazza.
Megoldás. Első lépésként rendezzük a ponthalmazt a bal-alsó sarokpontra vett polárszög szerint, majd minden egyenesen csak a sarokponttól legtávolabbi pontot hagyjuk meg, a többit töröljük. Az így törölt pontok biztosan nem lehetnek csúcspontjai a konvex buroknak. Legyen $\langle q_1, \ldots, q_m \rangle$ az így kapott pontsorozat polárszög szerinti rendezésben. Mindaddig, amíg van három olyan cirkulárisan egymást követő q_i, q_{i+1} q_{i+2} pont, hogy $\overrightarrow{q_{i+1}q_{i+2}}$ nem balra fordul $\overrightarrow{q_iq_{i+1}}$-hez képest, hagyjuk el a q_{i+1} pontot.
Az algoritmus futási ideje $O(n \lg n)$, ha a polárszög szerinti rendezést olyan algoritmussal valósítjuk meg amelynek futási ideje $O(n \lg n)$.



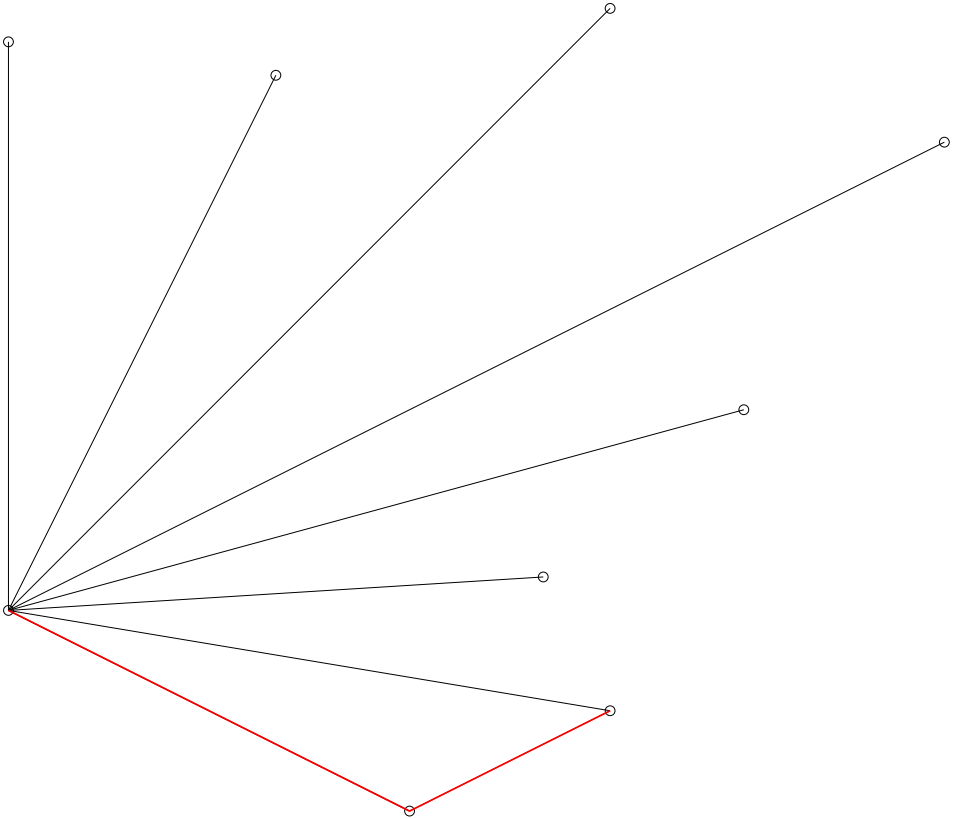
17. ábra. Ponthalmaz konvex burka.

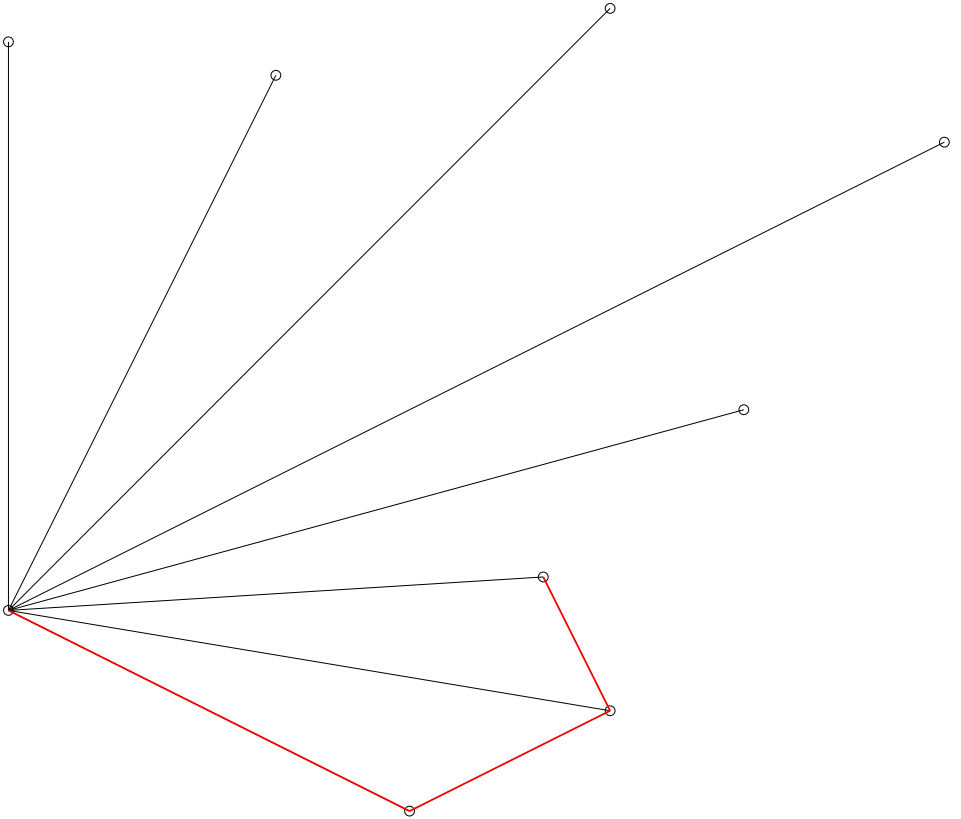


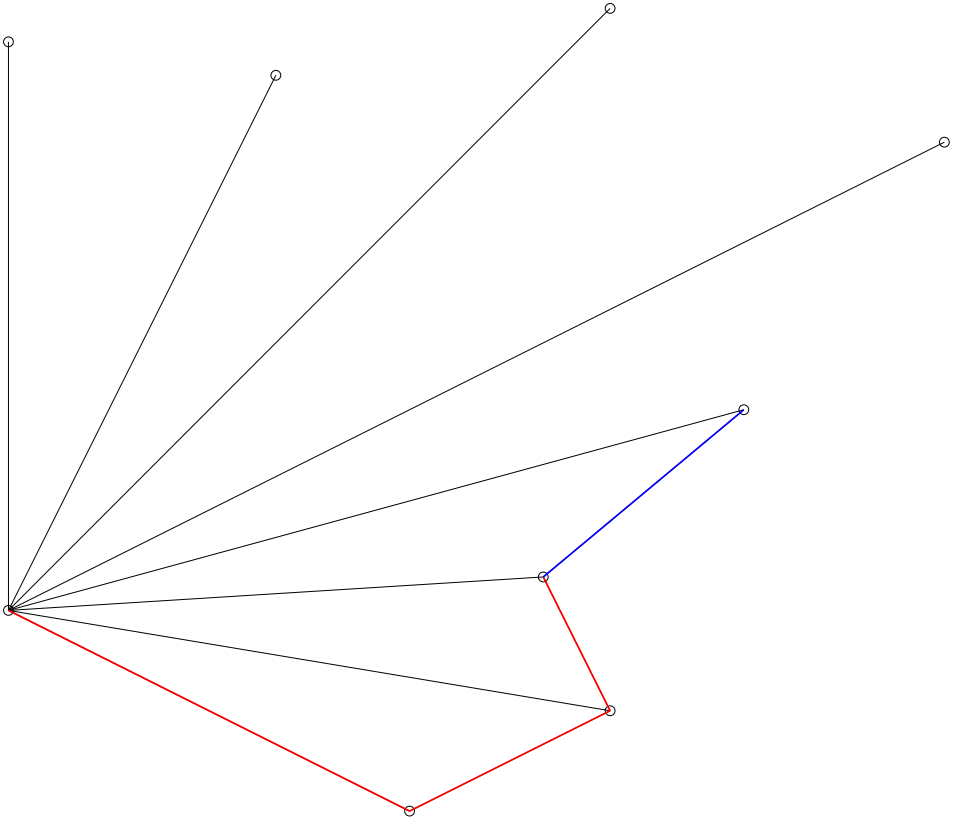
18. ábra. A pontok halmazának rendezése polárszög szerint.

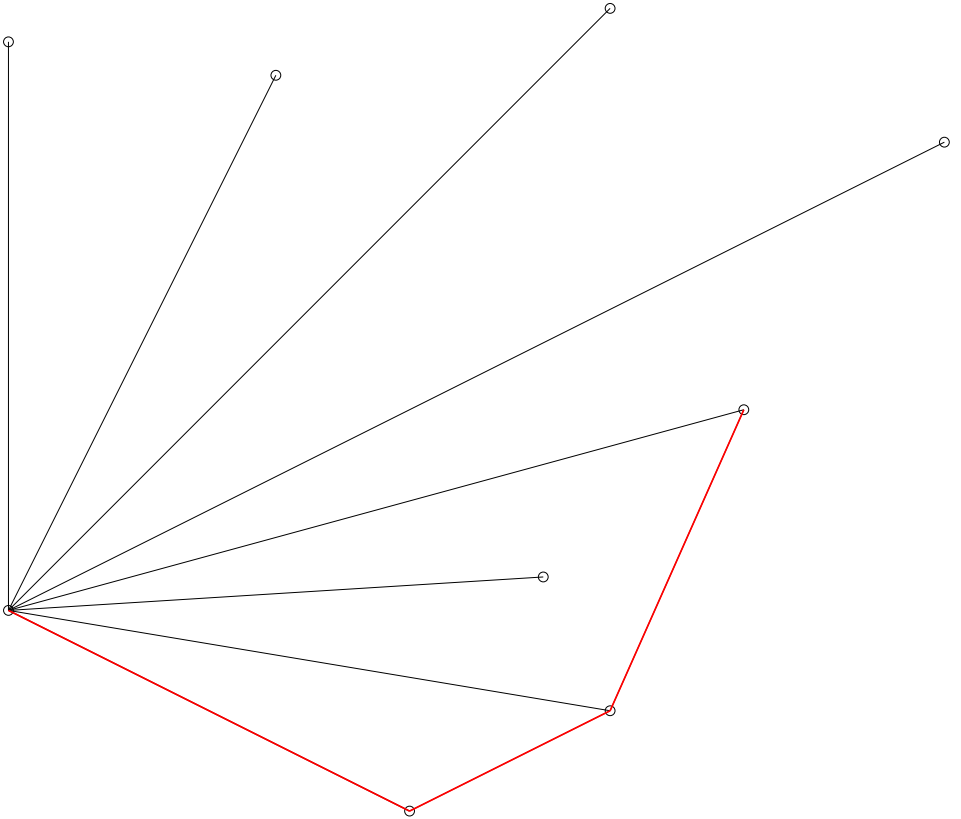


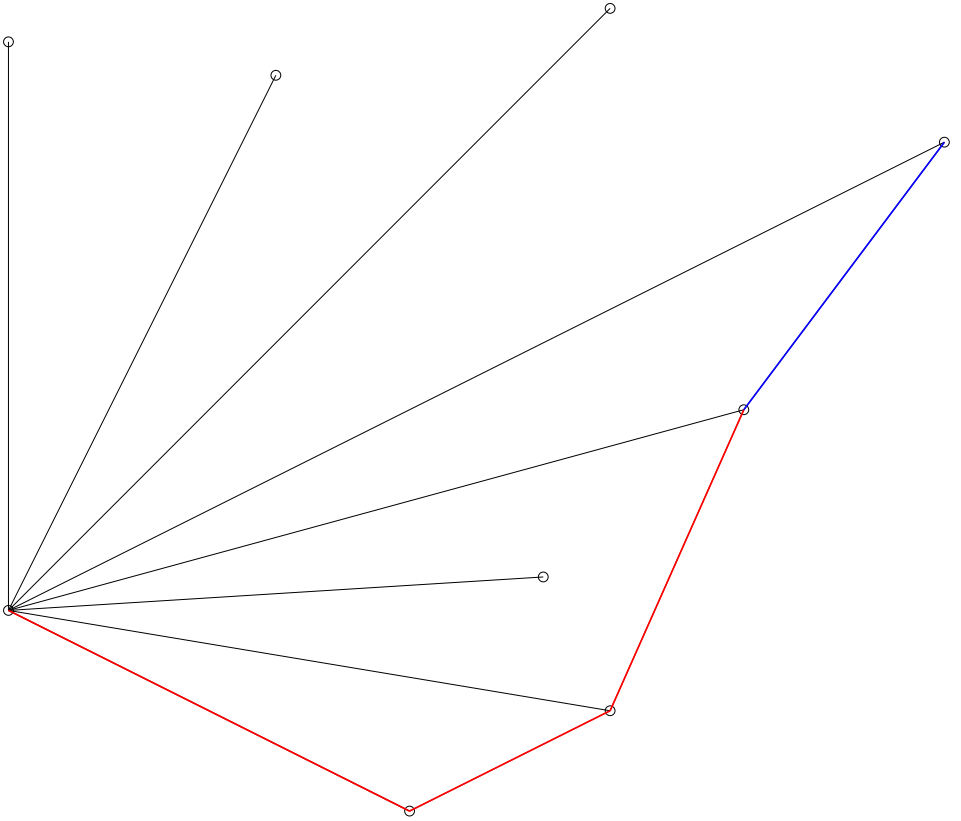
19. ábra. Minden egyenesen csak a legtávolabbi pont marad meg.

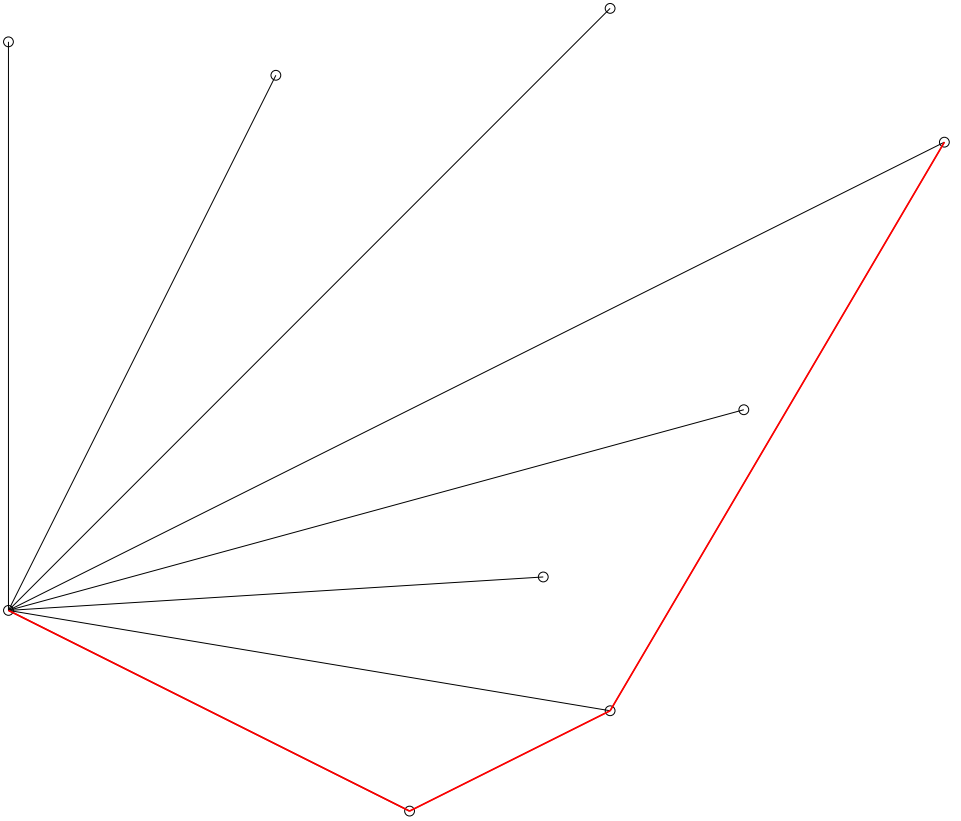


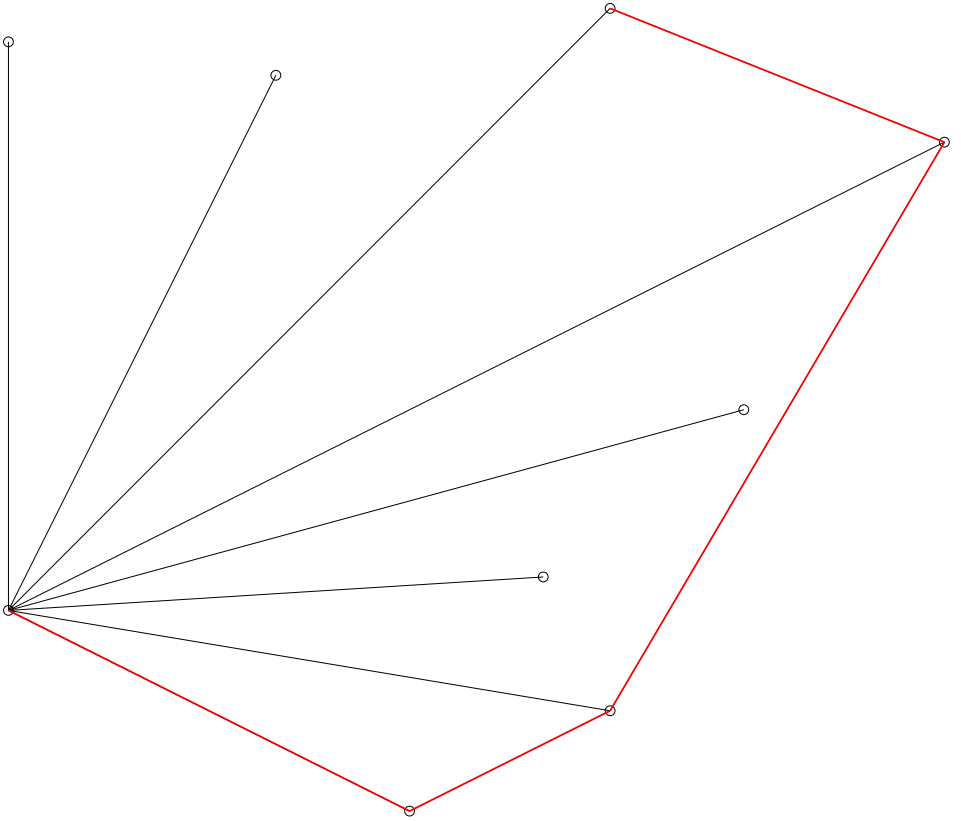


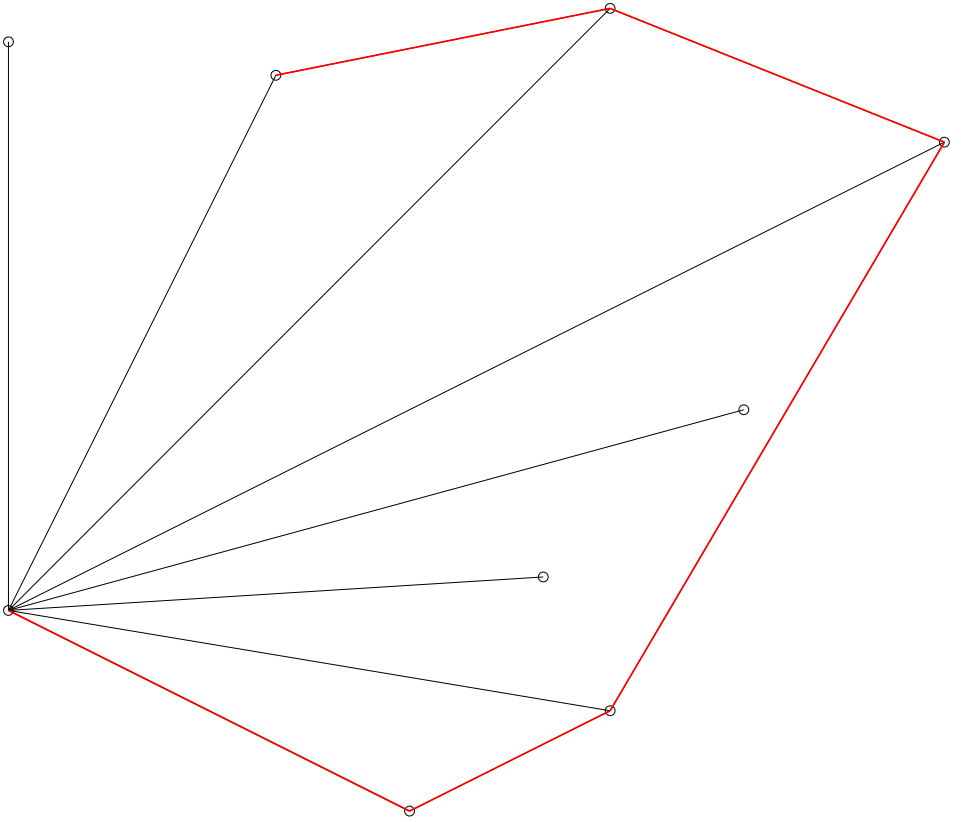


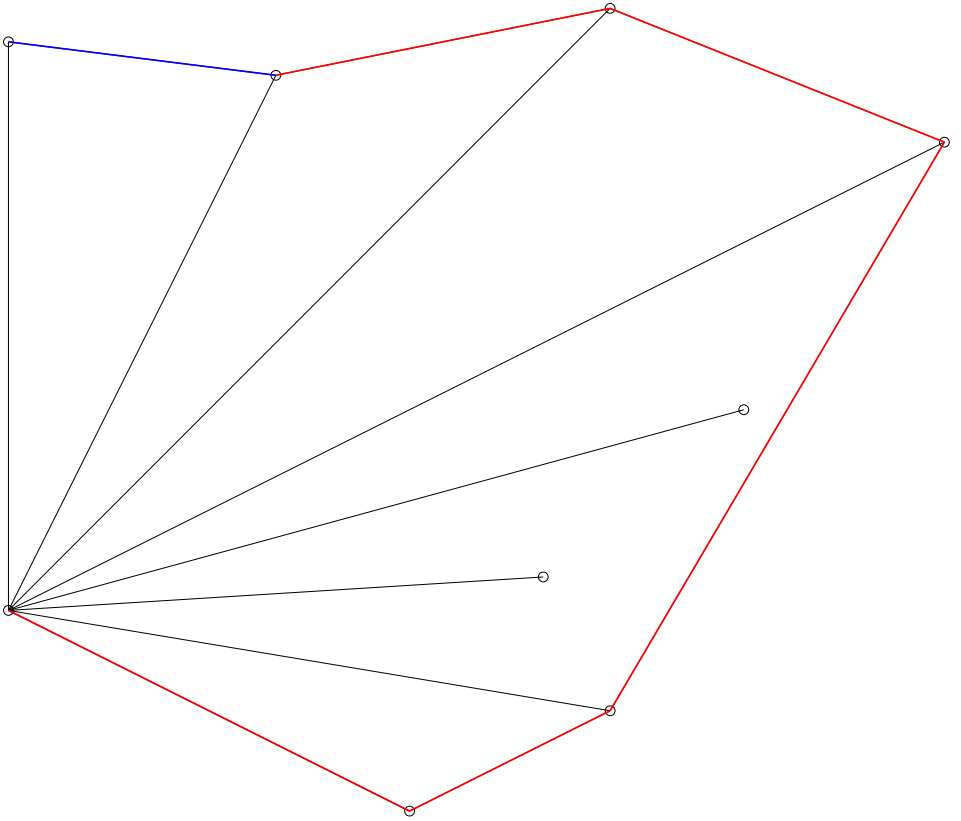


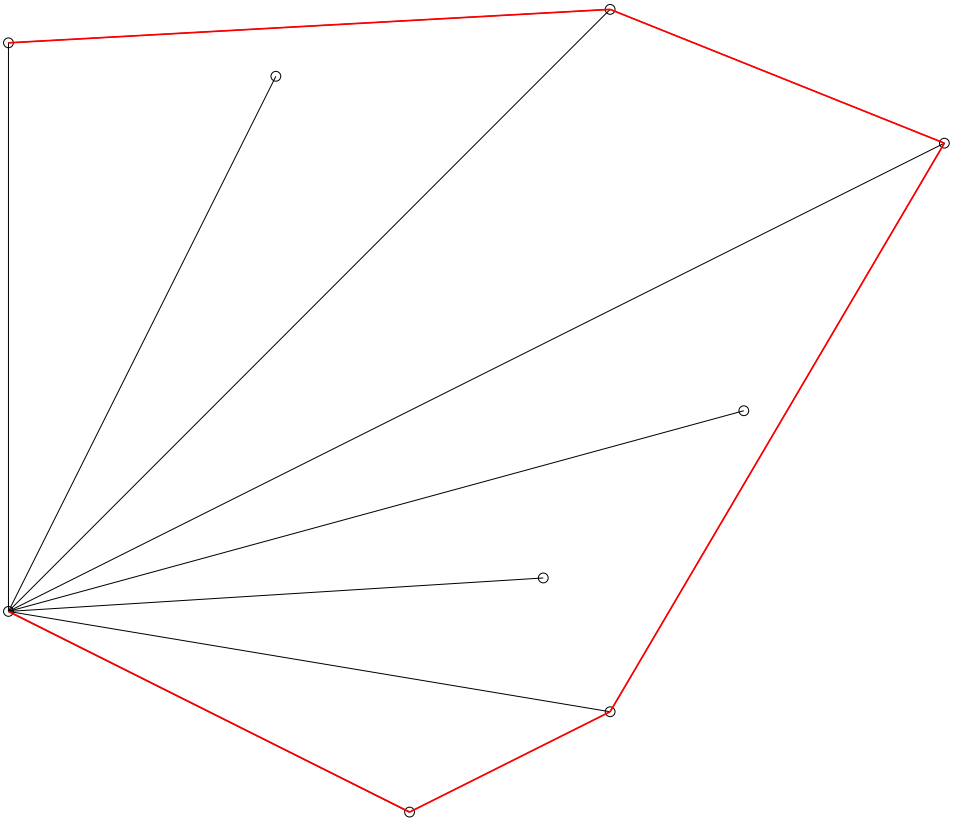


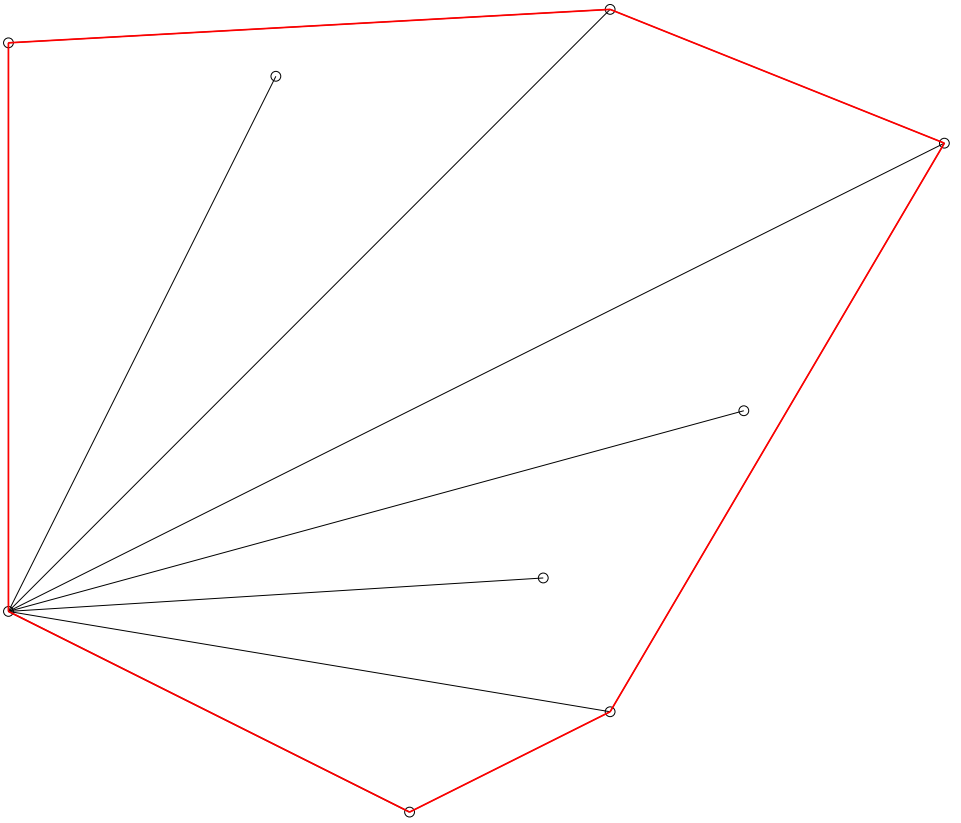












```
1  Pont Q;
2  int SarokRend(const void* a, const void* b) {
3    long long ax =((Pont*) a)->x - Q.x;
4    long long ay =((Pont*) a)->y - Q.y;
5    long long bx =((Pont*) b)->x - Q.x;
6    long long by =((Pont*) b)->y - Q.y;
7    if (ax==bx && ay==by) return 0;
8     long long kereszt=ax*by - bx*ay;
9     if (kereszt > 0) return -1;
10    else if (kereszt < 0) return 1;
11    else {
12    if (abs(ax)<abs(bx) || abs(ay)<abs(by))
13       return -1;
14    else
15       return 1;
16    }
17 }
18
19 void SarokRendez(Pont P[], int n){
20    Q=P[0];
21    for (int i=1; i<n;i++)
22       if (P[i].x<Q.x || Q.x==P[i].x && P[i].y<Q.y)
23          Q=P[i];
24    qsort((char *)P, n, sizeof(Pont),  SarokRend);
25 }
```

```
26 int KonvexBurok(Pont P[], int n){
27 //Bemenet: P[0],...,P[n-1],
28 // Kimenet: P[0],...,P[m] a konvex burok csúcsai }
29   int m,i;
30   Pont xy;
31
32   SarokRendez(P,n); //A ponthalmaz bal-alsó sarokpont szerinti rendezése}
33   m=1;
34   for (i=2; i<n; i++){
35     while (m>2 && ForgasIrany(P[m-1], P[m], P[i])<=0) m--;
36     m++;
37     xy=P[m]; P[m]=P[i]; P[i]=xy;
38   };
39   return m;
40 }
```

7. Feladat: Fekete-fehér párosítás a síkon.

Adott a síkon n darab fehér és n darab fekete pont úgy, hogy bármely három pont nem esik egy egyenesre. Párosítani kell a fehér pontokat fekete pontokkal úgy, hogy a párokat összekötő szakaszok ne metsszék egymást! A pontokat a $1,\ldots,n$ számokkal azonosítjuk.

Bemenet

A `paros.be` szöveges állomány első sora a fehér (és fekete) pontok $n\,(2 < n < 10000)$ számát tartalmazza. A további $2n$ sor mindegyike két egész számot tartalmaz, egy pont x és y koordinátáit, $(-20000 \leq x,y \leq 20000)$. Az első n sor a fehér, a második n sor a fekete pontokat tartalmazza.

Kimenet

A `paros.ki` szöveges állományba pontosan n sort kell kiírni, minden sorban egy fehér és a hozzá párosított fekete pont sorszáma álljon.

Példa bemenet és kimenet

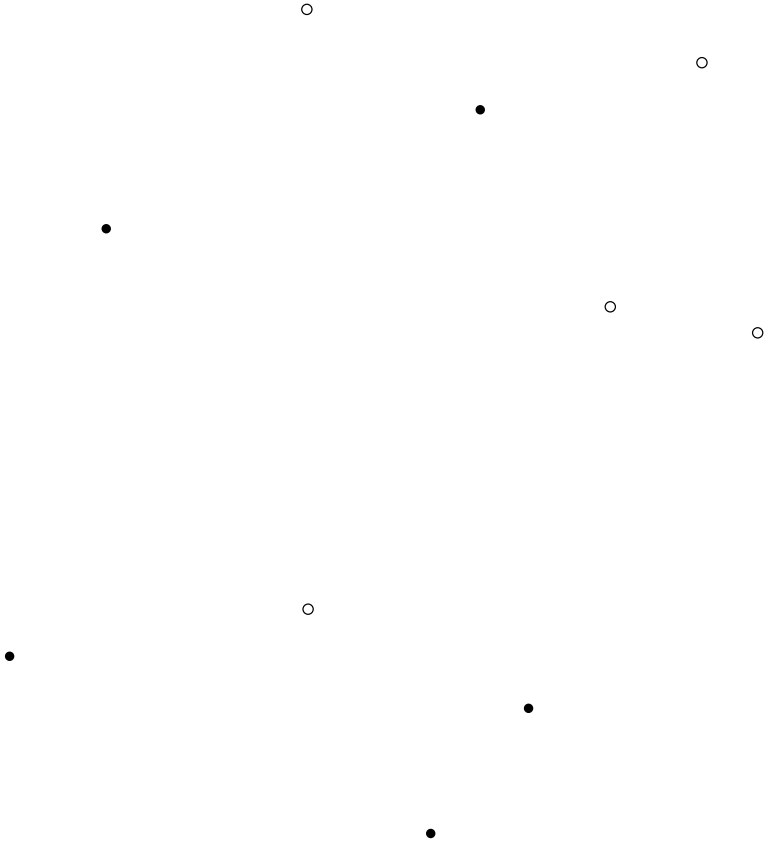
bemenet	kimenet
{paros} 5 6 17 0 2 14 1 -2 23 -7 19 32 13 26 14 30 24 21 22 14 26	{paros} 1 2 2 4 3 2 4 1 5 5

Megoldás

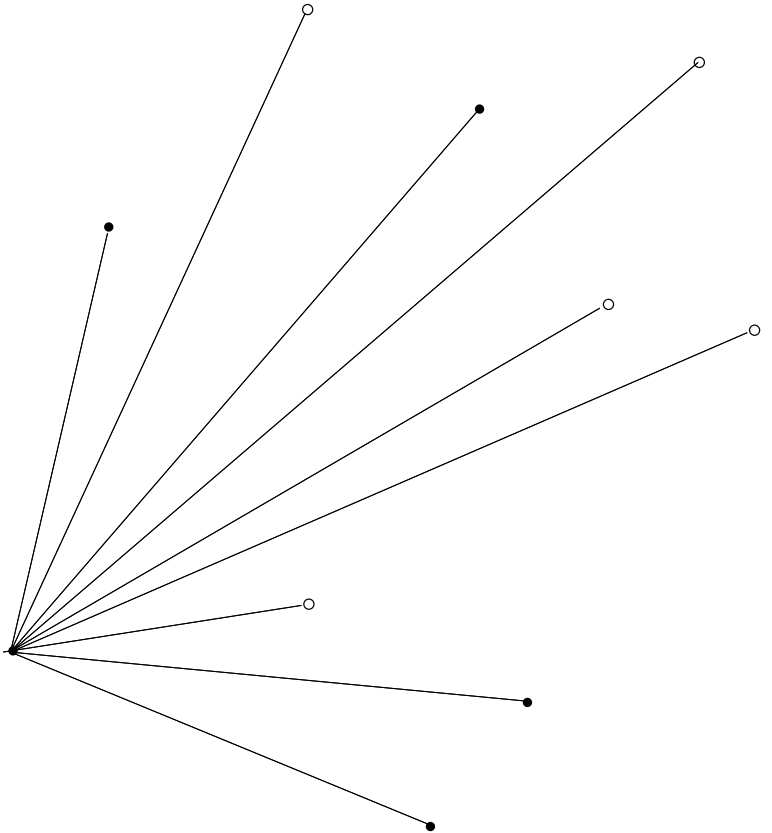
Legyen $P = \{p_1, \ldots, p_n, \ldots, p_{2n}\}$ a pontok halmaza.

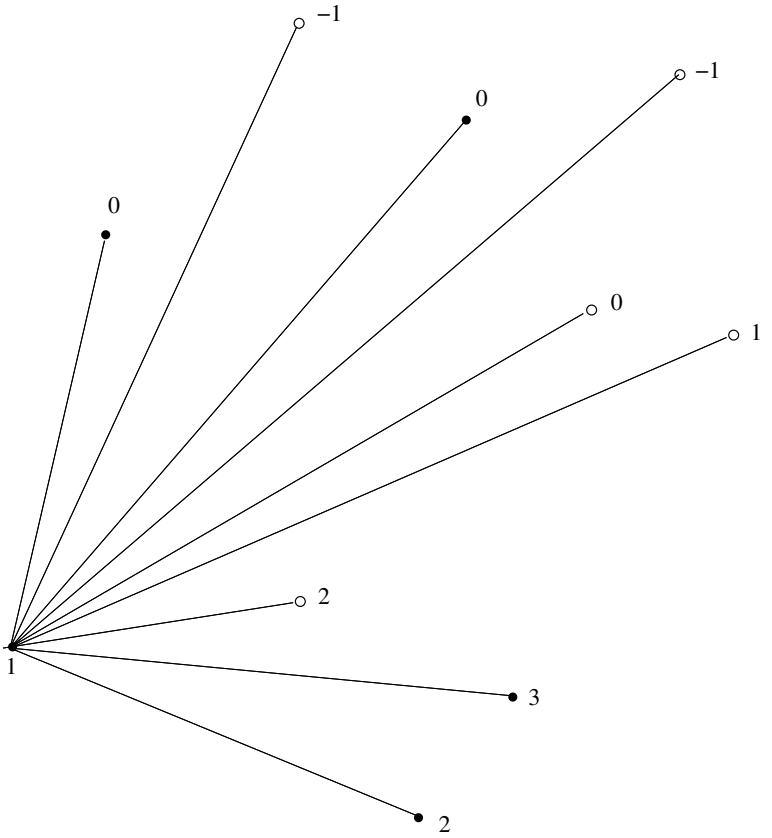
7.1. lemma. *Létezik olyan p_i és p_j különböző színű pontpár, hogy az $e(p_i, p_j)$ egyenes mindkét oldalán a fehér pontok száma megegyezik a fekete pontok számával.*

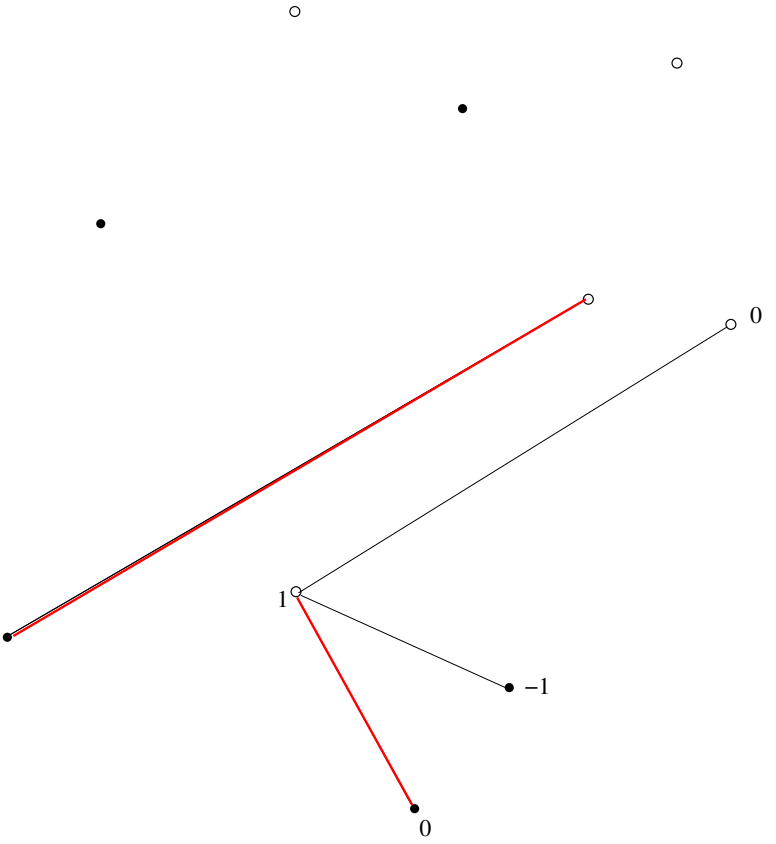
Bizonyítás. Rendezzük a pontokat a bal-alsó sarokponthoz viszonyított polárszög szerint. Tegyük fel, hogy a rendezésben az első pont fekete. Jelölje $d_i, i = 1, \ldots, 2n$. az első i pont közül a feketék számából kivonva a fehérek számát. Tehát $d_1 = 1$, $d_{2n} = 0$ és $d_{i+1} = d_i + 1$ ha az $i+1$-edik pont fekete, egyébként $d_{i+1} = d_i - 1$. Ha a rendezésben utolsó, azaz $2n$-edik pont fehér, akkor az $1.$ és $2n$-edik pontpár megoldás. Ha a $2n$-edik pont fekete, akkor $d_{2n-1} = -1$, de mivel $d_1 = 1$ és $d_{i+1} = d_i \pm 1$, így van olyan $1 < i < 2n-1$ index, hogy $d_i = 0$. Ha az i-edik pont nem fehér, akkor a keresést az $[1, i-1]$ intervallumban kell folytatni, ami véges sok lépés után végetér. ■

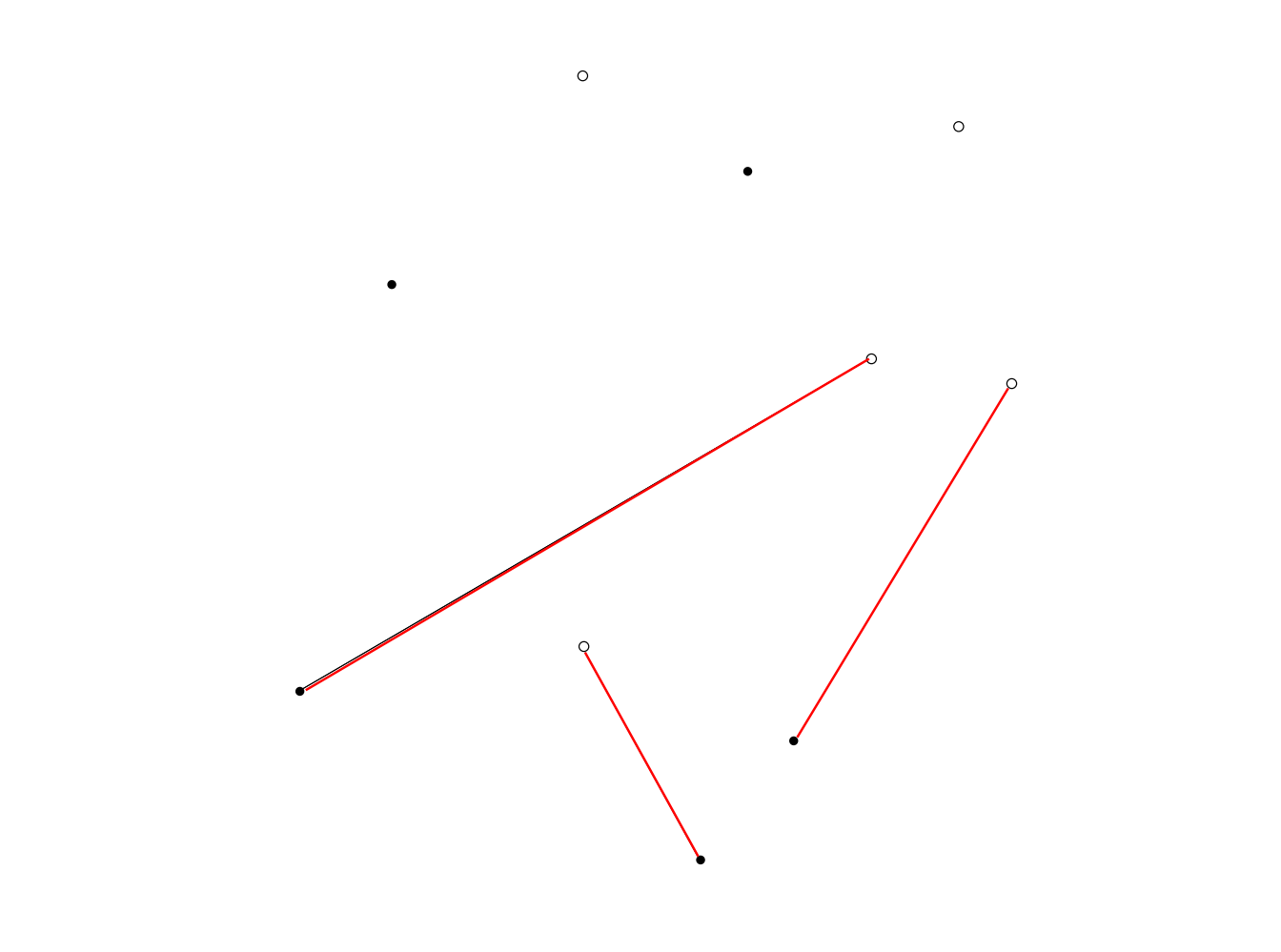


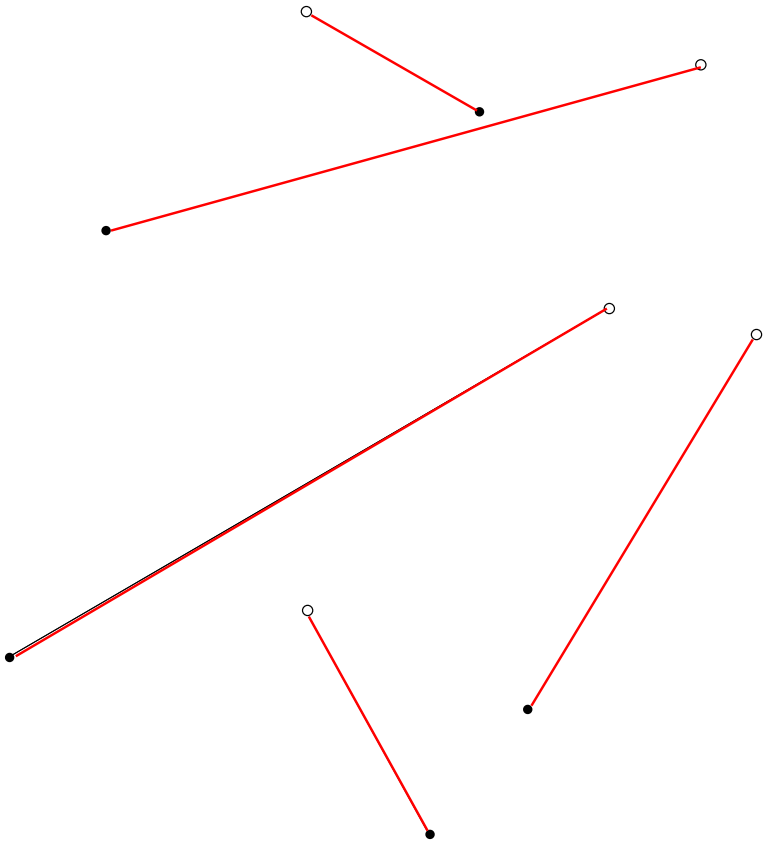
20. ábra. Párosítandó pontok




−1
0
−1
0
0
1
2
1
3
2


0
1
−1
0

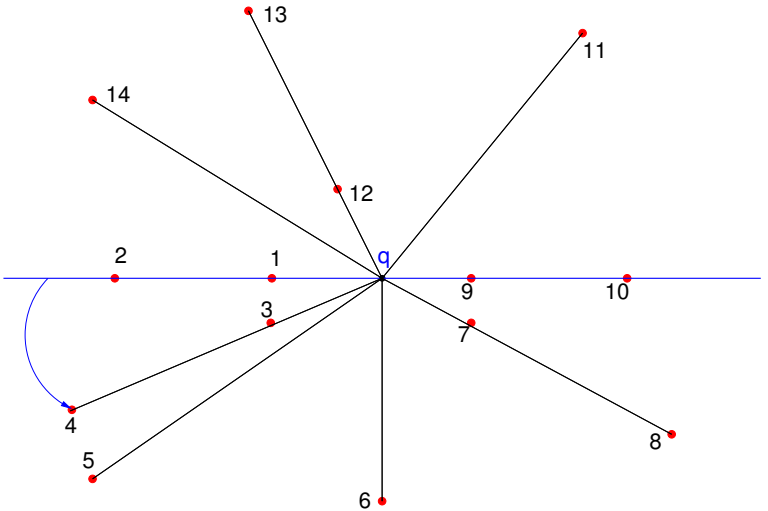




```
PAROSITAS(P,N)
   Procedure Parosit(bal, jobb);
   begin {Parosit}
      if jobb=bal+1 then begin
         KiIr(Bal,Jobb); exit;
      end;
      SarokPontRendez(P, bal jobb);
      d:=1; i:=bal+1
      while  true do begin
         if (P[bal].az>n) Xor (P[i].az>n) then
            d:=d-1
         else
            d:=d+1;
         if (d=0)and (P[bal].az>n) Xor (P[i].az>n) then break;
         i:=i+1;
      end {while}
      KiIr(bal, i);
      if bal+1 < i-1 then Parosit(bal+1, i-1);
      if i+1 < jobb then Parosit(i+1,jobb);
   end {Parosit}
begin {Parositas}
   Parosit(1, 2*n);
end {Parositas}
```

Az algoritmus futási ideje $O(n^2 \lg n)$.

Tetszőleges q pontra vonatkozó polárszög szerinti rendezés rendezési relációja is megadható a FORGASIRANY és a KOZEL felhasználásával.



21. ábra. A q pontra vett polárszög szerinti rendezés. A pont mellé írt szám a pontnak a rendezésbeli sorszáma.

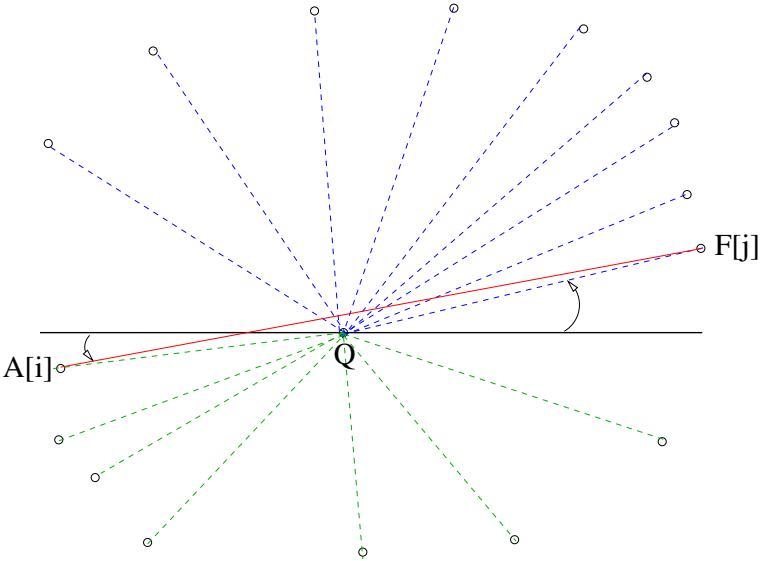
```
Function PolarRend(Q,P1,P2:Pont):Integer;
 {A Q ponthoz viszonyított polárszög szerinti rendezésben P1 és P2 viszonya
Var  Fir:Integer; Begin
  If (P1.x=P2.x)and(P1.y=P2.y) Then begin
    PolarRend:=0;   Exit;  End;
  Fir:=Forgasirany(Q,P1,P2);
  Case Fir of
    -1: If (p1.y<=q.y) and (p2.y>q.y) Then
          PolarRend:=-1
        Else
          PolarRend:=1;
    0 : If Kozel(q,p1,p2)and Kozel(p2,p1,q) or
           Kozel(p1,q,p2)and Kozel(p2,q,p1)and(p1.y<=q.y)
        Then
          PolarRend:=-1
        Else
          PolarRend:=1;
    +1: If (p1.y<=q.y) or (p2.y>q.y) Then
          PolarRend:=-1
        Else
          PolarRend:=1;
  End{case};
End{PolarRend};
```

8. Feladat: Pontlefedés szakasszal

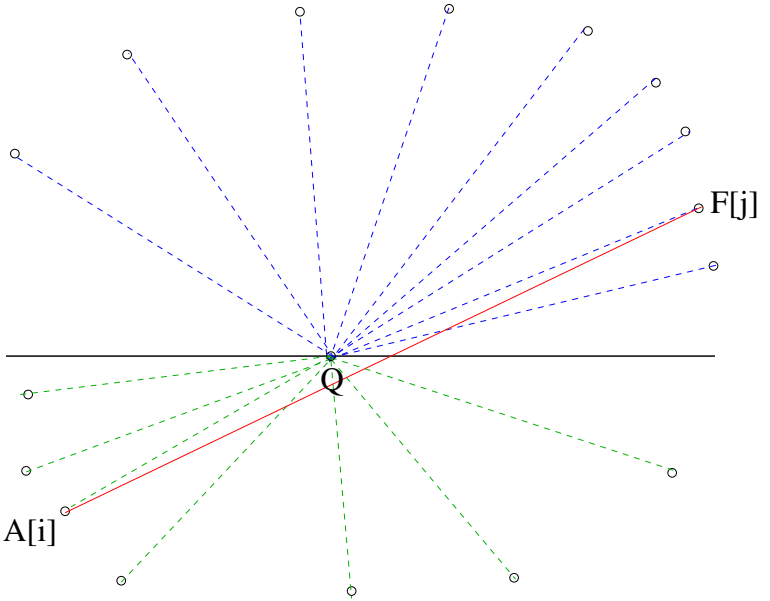
Adott a síkon egy P ponthalmaz és egy kitüntetett Q pontja. Kiszámítandó a P ponthalmaz két olyan A és B pontja, hogy a Q pont az $\overline{A,B}$ szakaszra esik.
Követelmény: $O(n \log n)$ futási idejű algoritmus.

Megoldás

Osszuk két diszjunkt részhalmazba P pontjait (már a beolvasáskor) aszerint, hogy a Q-n átmenő,



22. ábra. $i := i+1$



23. ábra. $j := j + 1$

x-tengellyel párhuzamos egyenes melyik oldalára esnek. Ha erre az egyenesre esik egy pont, akkor annak megfelelően, hogy Q előtt van-e. F-be kerüljenek az egyenes felettiek, A-be az alattiak. Majd rendezzük a két ponthalmazt a Q pontra vett polárszög szerint. Legyen $i := 1; j := 1$. Ha Q $\overrightarrow{A[i]F[j]}$-től jobbra van, akkor az $A[i]$-hez nincs olyan pont F-ben, amely megoldás. Hasonlóan, ha Q $\overrightarrow{A[i]F[j]}$-től balra van, akkor az $F[j]$-hez nincs olyan pont A-ben, amely megoldás. Tehát vagy i, vagy j növelhető és nem vesztünk el lehetséges megoldást, azaz minden $ii < i$ és $jj < j$ esetén a $\overrightarrow{A[ii]F[jj]}$ nem lehet megoldás.

```cpp
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <iostream>
using namespace std;
#define maxN 50000

typedef struct{
  long long x,y;
  int azon;
}Pont;

Pont A[maxN];
Pont F[maxN];
Pont Q;

int ForgasIrany(Pont P0, Pont P1,Pont P2){
   long long Kereszt=(P1.x-P0.x)*(P2.y-P0.y)-(P2.x-P0.x)*(P1.y-P0.y);
   if (Kereszt<0)
      return -1;
   else if (Kereszt>1)
      return 1;
   else
      return 0;
}
```

```
25 int SarokRend(const void* a, const void* b) {
26   long long ax =((Pont*) a)->x - Q.x;
27   long long ay =((Pont*) a)->y - Q.y;
28   long long bx =((Pont*) b)->x - Q.x;
29   long long by =((Pont*) b)->y - Q.y;
30   if (ax==bx && ay==by) return 0;
31    long long kereszt=ax*by - bx*ay;
32    if (kereszt > 0) return -1;
33    else if (kereszt < 0) return 1;
34    else {
35    if (abs(ax)<abs(bx) || abs(ay)<abs(by))
36       return -1;
37    else
38       return 1;
39    }
40 }
```

```
41 int main( int argc, char **argv){
42    int n, i, x,y;
43    cin>>n;
44    cin>>x; cin>>y;
45    Q.x=x; Q.y=y;
46    int n1=0, n2=0;
47    for (i = 0; i < n; i++){
48       cin>>x; cin>>y;
49       if (y<Q.y || y==Q.y && x<Q.x){
50          A[n1].x=x; A[n1].y=y; A[n1].azon=i;
51          n1++;
52       }else{
53          F[n2].x=x; F[n2].y=y; F[n2].azon=i;
54          n2++;
55       }
56    }
```

```
57     qsort((char *)A, n1, sizeof(Pont),  SarokRend);
58     qsort((char *)F, n2, sizeof(Pont),  SarokRend);
59     int i1=0, i2=0;
60     int fir;
61     while (i1<n1 && i2<n2){
62        fir=ForgasIrany(A[i1], F[i2], Q);
63        if (fir<0){
64           i2++;
65        }else if (fir>0){
66           i1++;
67        }else{
68           cout<<A[i1].azon<<" "<<F[i2].azon<<endl;
69           return 0;
70        }
71     }
72     cout<<"0 0"<<endl;
73     return 0;
74  }
```