# 4. előadás – Gráfok síkbarajzolhatósága

## Görbe

folytonos

Szóban: Az dimenziós térnek részhalmazára egy -beli görbe egy gamma 0-1 intervallumot X-be képezi, folytonos függvény.

## Gráf lerajzolása

Pontokat rakunk, összekötjük görbékkel.

## G irányított gráf X-beli lerajzolása

Egy irányított gráf lerajzolása nem más, mint egy rendezett pár, ahol:

injektív

görbe

folytonos

Ez a rész nem látszik jól:  
ahol Nem jól látszórész vége.

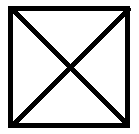
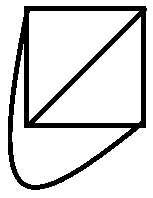
És a képek egymástól és a diszjunktak.

Továbbá az egyszerű görbe: (Törölt információ: injektív a -en.)

Legfeljebb a kezdő és végpontja egyezik meg.

## Síkbarajzolható gráf

Ha egy gráfnak van lerajzolása, ami a síkban ) megy, akkor síkbarajzolható.

Például síkbarajzolható. Hogyan? Így: 

Síkbarajzolhatóság eldöntésére van tétel:

## Minden gráf, ami nem síkbarajzolható, az valahogy tartalmaz vagy egy -t vagy egy -öt.

* Három ház három kút
* Teljes ötszög

## Topologikus izomorfizmus

Két gráf nem izomorf, de topologikusan izomorf, ha az alábbi lépést vagy a fordítottját alkalmazva véges sokszor, egyiket át lehet alakítani a másikba:

Egy másodfokú csúcsot letörlünk, és a szomszédjait összekötjük egy új éllel.

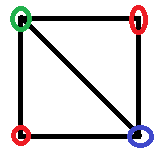
## Kuratowski tétele: Egy gráf pontosan akkor síkbarajzolható, hogyha nincs benne topologikusan se a , se a részgráf.

Nehéz tétel, nem bizonyítjuk

## DEF: Irányított körmentes gráf, angolul DAG (Directed Acyclic Graph) az az irányított gráf, mely nem tartalmaz irányított kört.

Ez más, mint a fa. Tele lehet körökkel, csak nem irányított körökkel. "Minden nyíl jobbra mutat."

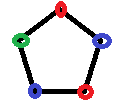
## DEF: Egy gráf csúcsainak színezését jólszínezésnek hívjuk, ha a szomszédos csúcsok színe különböző



## Egy gráf színnel színezhető, ha van olyan jólszínezése, mely legfeljebb színt használ.

A legkisebb olyan -t, melyre a gráf -színezhető, a gráf kromatikus számának hívják. Jele a CHI görög betű:

Ötszög: 3



Teljes ötszög: 5

## Páros gráf ⇔ kromatikus száma 2

## Négyszíntétel: Minden síkbarajzolható gráf legfeljebb négy színnel színezhető.

Térkép négy színnel színezhető, hogy szomszédos országok színe különböző.

Ez sokáig csak sejtés volt. Sőt, nem is tekintették "normálisnak" a bizonyítást. Számítógéppel, mind a lehetőség megvizsgálásával volt bizonyítva. (Ma is.)

Most már bizonyítottnak tekintjük. Számítógéppel az óta már mást is bizonyítottunk.

# Gráfok felhasználása

Miért jó? Miért szeretik annyira a programozók a gráfokat?

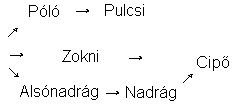
## Súlyozott gráfok

Hálózatok (számítógépes, vízvezeték, stb.)

Adatot küldünk. Router (útvonal kereső) megmodnja, merre menjen.

## DAG (Irányított körmentes gráf)

Öltözködés algoritmusa:



Házépítés: Alapozni kell előbb, mint tetőt építeni. Falakat fel kell húzni vakolás előtt.

## Színezés

Konfliktusok keresése: Politikusok vacsoráztatása rendkívül kényes dolog. Nem mindegy, hogy ki kivel ülhet egy asztalnál.

Kapcsolati gráfon az "UTÁL" címkézett éllel összekötött politikusok más színnel lesznek színezve. (Szín = asztal azonosítója

Változók tárolása regiszterekben. esetén és nem kerülhetnek egy regiszterbe, kiütnék egymást.

Órarend: Bonyolult kapcsolatok rendszere: Tanár egy időpontban nem lehet két helyen. Diák sem. (Elméletileg!) Másnak nem lehet ugyanitt ugyanekkor órája.

## Síkbarajzolás

Nyomtatott áramkör: Nem akarjuk a vezetékeket szigetelni, se 3D-be felmenni. Mert így olcsó.

# Ciklikus csoportok

Gráfoknak ezzel vége. Most jön a kódoláselmélet alapozás. Csoportok, polinomok, testek. (Minden, ami rossz.)

## Ismétlés: Csoport

csoport, ha:

* • binér (kétváltozós) művelet -n (pl. szorzás)
  + Páratlan számokon összeadás pl. nem művelet, mert megbukik , már nem páratlan
* asszociatív
* van semleges elem
  + 1 szorzásnál, 0 összeadásnál
* mindennek van inverze
  + ellentett összeadásnál, reciprok a szorzásnál

grupoid → félcsoport → monoid → csoport → Ábel-csoport, ha még kommutatív is

### Példák Ábel-csoportra

Érdekesség: Embereknek kitalált algoritmusok sokkal lassabbak (100 lépés). A csoportelméleti dolgok, amiket a számítógép használ, nem érthetőek számunkra, de jóval hatékonyabbak (20 lépés). Rubik kocka állásai kb. 20 jegyű szám, nagyon nagy csoport.

Általában szimmetriák vagy forgatások csoportjai kellenek majd nekünk.

## Ismétlés: Részcsoport

Egy csoportnak részcsoportja, ha teljesül a "rész" és a "csoport":

Rész:

Csoport: Művelete csak -n nézve (megszorítva -ra) csoport.

### Példák

Például a páros számok összeadással részcsoportja ℤ-nek az összeadással.

Páratlanok összeadással: 3+5=8

Pozitív számok összeadással: Nincs benne nulla.

A kétszer kettes valósmátrixok melyeknek determinánsa pozitív részcsoportja az összes numnulla determinánsú mátrixnak. De ez NEM Ábel csoport. (?) És negatív determinánssal ugyan ez nem igaz. Két negatív lehet pozitív.

## Ismétlés: Homomorfizmus

Függvény és között, teljesen és egyértelműen leképezi -et -be. Legalábbis azt hiszem így volt tavaly…

Izomorfizmus (ha bijektív), endomorfizmus, epimorfizmus, monomorfizmus, automorfizmus (ha és izomorfizmus).

## Példák csoportok közti dolgokra

### Izomorfizmus

A halmazon a modulo 2 összeadás kizáró vagy

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| + | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

### Homomorfizmus

Művelettartó:

Mátrixhoz hozzárendezzük a determinánsát. det(A\*B)=det(A)\*det(B)

## Ismétlés: Homomorf kép

-.- Volt?

## Generátum

(részhalmaz, nem részcsoport)

az a legszűkebb részcsoportja -nek, melynek részhalmaza .

mindazon elemek halmaza, melyeket a K-beli elemekből az inverzképzés és a művelet segítségével előállíthatunk.

Ez a rész most még inkább nem létszik:  
  
Nem látszó rész vége.

## Részcsoportok tetszőleges metszete is részcsoport

Be kell látni, hogy zárt a műveletre, inverzképzésre és benne van a semleges elem.

Legyen a művelet a szorzás.

Ekkor

Részcsoport miatt is igaz.

Tehát

Inverz, semleges elem (pipa)

### Következmény: az összes -t tartalmazó részcsoport metszete.

Előző példa generátuma: Hárommal osztható számok (?)

### Állítás:

Bizonyítás:

Bármilyen g előállítható minden olyan -ra, aminek részhalmaza a .

És mert részcsoport.

### Jelölési sajátosság

Ha egyelemű, , akkor helyett is írható. Ekkor ciklikus csoport.

## Ciklikus csoport

Létezik olyan eleme, hogy az generátum.

Például: Az és a a generátumai.

Komplex számos példát nem írom. (Nem látszik a koszos táblán. Még szerencse, hogy csak egy példa került oda, nem valami fontos tétel.)

## Csoport homomorf képe is csoport

A művelet asszociatív maradt, inverz és semleges elem is benne marad.

Asszociativitás: Művelettartás miatt.

Semleges elem benne van a képben: Semleges elem képe lesz.

semleges elem (?)

Inverz:

### Példa

Mátrixok determinánsa megint…

Minket a ciklikus csoportok fognak a jövőben érdekelni.

## Ciklikus csoport homomorf képe is ciklikus

Hiszen generálja a generátum képe.

Ha

De

Pl.: a művelettartás miatt.

Részcsoportra is igaz ugyanez, de előtte egy másik tétel:

## Ha végtelen egy ciklikus csoport, akkor az izomorf a -szal. És egy -elemű ciklikus csoport izomorf a -szal.

Tekintsük azt a homomorfizmust, hogy

Ha ez injektív, akkor kész vagyunk. (?)

Ha bijektív, akkor

Ha nem bijektív, akkor egybeesés:

skatulya elv miatt.

Ebből az jön ki, hogy egységelem. ( pozitív)

Van köztük legkisebb: Legyen a legkisebb pozitív kitevő, amire

Ekkor , mert:

* Egyrészt: , mert különben
* Másrészt:

Nyilván izomorf (…)

Példa: hatványai. Ismétlődik négyesével.

## Miért?

Kódolás  
↑  
Véges testek fölötti mátrixok (polinomjai)  
↑  
Ciklikus csoportok

Előadás vége.