# 2. előadás – Fák

## Feszítőfa

Egy gráf feszítőfája egy olyan részgráf, ami ő maga fa és csúcsainak halmaza megegyezik az eredeti gráf csúcsaival.

Ha nem összefüggő, nincs .

Minden összefüggő véges gráfnak van feszítőfája.

Amíg van kör, hagyjuk el annak egyik élét.

## Összefüggő véges gráfban legalább (élek száma - csúcsok száma + 1) kör van.

Feszítőfába visszarakunk egy élt. Így keletkezik egy kör.

Még egy élt visszarakunk, keletkezik még egy, különböző kör.

Így az összes alapkört megkapjuk.

## Vágás

G gráfban v' és v'' csúcsok. V részhalmaza elvágja v'-t v''-től. Van E részhalmaza vágás halmaz is van.

Ha a gráf nem összefüggő, akkor ∅ is elvágó halmaz, mert G már el van vágva.

A legkisebb (minimális) elvágó halmaz a vágás.

## Véges összefüggő gráfban legalább (csúcsok száma -1) különböző vágás van.

Legalább egy élben különböznek az élhalmazok.

F feszítőfája G-nek. F éleinek halmaza E'.

Minden E'-beli élhez egy vágást konstruálok.

Elvágó halmaz: {E\E'}∪{e}, e∈E'

Ezt minden e-re elvégzem.

## Erdő

A körmentes gráf erdő.

Komponensei (összefüggő részhalmazai) fák.

## Feszítőerdő

Gráf minden komponenséből tartalmaz egy feszítőfát.

## Euler vonal

"ajler vonal"

Bejár minden csúcsot, éleken csak egyszer halad át.

Első gráfelméleti probléma: Königsbergben a folyón van 7 híd, át tudunk-e sétálni a hét hídon úgy, hogy ugyanoda érünk vissza, ahonnan elindultunk, és minden hídon csak egyszer megyünk át?

Nincs ilyen.

Összefüggő véges gráfban létezik zárt Euler-vonal, ha minden csúcs foka páros fokú. Ha 2s páratlan fokú csúcs van, akkor a gráf s darab páronként éldiszjunkt nyílt vonal egyesítése.

### Konstruktív bizonyítás

s=0, tetszőleges v csúcs, Ez 0 élt tartalmazó, zárt vonal.

…

## Hamilton út

Véges összefüggő gráfban -ből -be út, amely egyszer halad át minden csúcson.

Hamilton kör: Hamilton út -ből -be.

Az összes lehetőség kipróbálásánál nincs jobb algoritmusunk.

## Címkézett és súlyozott gráfok

 és az élcímkék és csúcscímkék halmaza.

Élsúlyozás, csúcssúlyozott gráf

 a súlyozó leképezés:

Csúcs súlya: fogom az összes élt, ami oda vezet és összeadom.

## Mohó algoritmus minimális összsúlyú feszítőerdő konstrukciójára

Hozzáveszünk egy minimális súlyú olyan élt, hogy ne legyen benne kör.

Biz: TFH F összsúlya mégsem minimális. Ekkor ∃F', aminek súlya kisebb, mint F: w(F)>w(F') F'-nek lehető legtöbb közös éle legyen F-fel.

Legyen e' F' egy éle, de nem éle F-nek. Adjuk ezt az élt F-hez, keletkezik egy kör. Ennek a körnek bármely éle ≤, mint e'. Ha nem így lenne, az algoritmus e'-t választotta volna.

Hagyjuk el e'-t F'-ből. Így két komponens lesz. A fent keletkezett kör élei közül 1 összekötő él, e'', vagy ugyanolyan, vagy kisebb súlyú, mint e'.

Ha kisebb súlyú, akkor ellentmondás. e' helyett e'' lenne az F'-ben. Ha egyenlők, akkor így F'-nek több közös éle van F-fel. Mindkét eset ellentmondásra vezet.

## Utazó ügynök probléma

Véges összefüggő élsúlyozott gráf

Minimális összsúlyú Hamilton kört keresünk.

Mohó algoritmus itt nem jó.

## Irányított gráf – 1.docx

Minden élnek van egy kezdőpontja és egy végpontja.

Irányítatlan gráfot úgy kapunk, ha elhagyjuk az irányítást. (rendezett pár helyett halmaz) Minden irányítatlan gráfos fogalom használható irányított gráfra is.

Hurokél csak egyféleképpen irányítható.

## Irányított gráf megfordítása

Összes él irányát megfordítom.

## Szigorúan párhuzamos él

Irányuk is egyenlő.

## E(S)

E(S) S csúcshalmazból a komplementerbe vezető csúcsok halmaza

 kezdőpont van S-ben, végpont pedig -ben.

 végpont van S-ben, kezdőpont pedig -ben.

## Kifok, befok

Hány él megy ki / jön be.

## Irányított gráfok izomorfiája

Irányítatlan gráfok izomorfiája + Kezdőpont képe kezdőpont, végpont képe végpont.

## Irányított teljes gráf

Minden csúcsból minden csúcsba vezet irányított él, vagyis kétszer annyi éle van, mint irányítatlan párjának.

## Véges gráfok éllistás ábrázolása

 csúcsok nevei, élek nevei, leképezés, amely megmondja, hogy melyik élnek mi a kezdő és végpontja: (e, v, v') hármas.

Minden csúcshoz tartozik az élek listája, amely abból a csúcsból indul ki.

Irányítatlan gráfot általában dupla élekkel ábrázolunk, oda-vissza élekkel minden irányítatlan él helyett.

## Irányított részgráf, szupergráf

## Irányított séták, vonalak, utak, körök

Ugyan az, mint az irányítatlan, de irányított élen nem lehet az iránnyal szemben haladni.

## Topologikus rendezés

…

## Erősen összefüggő gráf

Minden csúcsból minden másik csúcsba vezet irányított séta/út.

Mindenhonnan mindenhova.

## Erős komponens

Minden csúcsából vezet minden másik csúcsába irányított séta/út.

Ekvivalenciaosztályozás.

# Irányított fa

Egyetlen csúcsának befoka 0, ez a gyökér. A többinek befoka 1.

## Gyökér

Gyökérből minden csúcsba vezet egy és csak egy irányított út.

## Szint

Az ide vezető út hossza.

## Magasság

A fa magassága a csúcsok szintjeinek maximuma.

## Gyerek, szülő

Minden él a szülőből a gyerekbe vezet.

## Testvér

Két csúcsnak ugyanaz a szülője.

## Irányított részfa

Van gyökere.

## Levél

Kifoka 0.

## Irányítatlan fából irányított

Kijelölök egy gyökeret, csak egyféleképpen lehet irányítani.

## -ad rendű fa

Élcímkézett.

Kifoka minden csúcsnak legfeljebb lehet.

## Bináris fa

, másodrendű

Beszélünk bal/jobb kimenő élről/gyerekről/részfáról

## Címkézett fák akkor is különbözőek, ha csak a címkézés különbözik

Például egy bal él átvált jobb éllé, akkor máris különböző.

## König-lemma

Végtelen irányított fában minden csúcsnak véges sok gyereke van, akkor van a gyökérrel induló végtelen csúcssorozat.