# 1. előadás – Gráfelmélet

Burcsi Péter <http://compalg.inf.elte.hu/~bupe/diszkmat.html>

Kezdés: 11:10, 75 perc után 12:25-kor szünet

Szünet vége: 12:40

Előadás vége: 13:50

Jövő héten előadás elmarad, ezért a szünetig negyed órával tovább lesz tartva az előadás.

## Tematika

* Gráfok
* Polinomok (Előtte algebra, utána véges testek)
* Kódolás
* Turing gép, algoritmus matematikai formalizálása, kiszámíthatóság-elmélet (Utolsó órán)

## Követelményrendszer

Tankönyv: Bevezetés a matematikába 7-8-9-10 fejezetek

12 előadás lesz, 4-ről lehet hiányozni

Pluszminusz minden gyakorlaton lesz.

### Vizsga

Beugró + 2 tételes szóbeli.

Honlapon fent lesz a tematika.

# Gráfelmélet

Pontokat összekötünk vonalakkal (élekkel) vagy nyilakkal. Rajtuk címkék vagy súlyok lehetnek.

Pl.: Számok. Összekötöm -t -vel, ha .

Pl.: Budapest, Frankfurt, Milánó repülőterek mind össze vannak kötve egymással. Milánóból még el lehet jutni Nápolyba. De Budapest-Nápoly nincs. Frankfurt és Milánó között több él megy.



Pl.: Budapest, Győr, Kecskemét közöttük levő távolságokat ráírjuk a vonalra.

Gráf más, mint reláció, mert az élekre és csúcsokra lehet címkéket írni. Címke lehet szám is, nem csak betűk. Két pont között nem csak egy él mehet.

## DEF: Irányítatlan gráf

 rendezett hármas, ahol:

-fi Görög betű az illeszkedési leképezés, ami E-ből képez V-beli rendezetlen párok halmazába. (-beli elemek rendezetlen párosa)

V (vertex) a csúcsok (pontok) halmaza

E (edge) az élek (pontokat kötnek össze) halmaza

### Példa

 még nem gráf, mert az éleknek nincs neve.

 összekötő neve legyen

 összekötő neve legyen

## DEF: Irányított gráf

Minden élnek van egy kezdőpontja és egy végpontja.

E és V ugyan az, mint fent.

Ha vagy a egyik komponense, akkor és illeszkednek vagy illeszkedik -re vagy illeszkedik -re.

Irányított esetben ha , akkor az kezdőpontja (honnan megy a nyíl), pedig az végpontja.

## Szomszédos csúcs

Két különböző csúcs szomszédos, ha van olyan él, melyre mindketten illeszkednek.

## Szomszédos él

Két különböző él szomszédos, ha van olyan csúcs, melyre mindkettő illeszkedik.

## Párhuzamos él

Ha két különböző élre igaz, hogy , akkor és párhuzamos élek.

(Tehát 2 közös csúcs, melyeknek ugyanazok a végpontjai.)

## Hurokél

Ha csak egy csúcsra illeszkedik.

## Véges gráf

 gráf véges, ha és is véges.

Véges sok csúcs és véges sok él.

Ekkor is automatikusan véges.

## Végtelen gráf

Ha nem véges.

### Példa

E véges, V végtelen: Gráfban egy élpár összekötve, és mellette végtelen sok csúcs nincs összekötve.

E végtelen, V véges: Két csúcs végtelen sok éllel összekötve.

## Izolált csúcs

Egy csúcs izolált, ha nem illeszkedik rá él.

Megjegyzés: Csúcs helyett mondható pont vagy szögpont.

## Egyszerű gráf

Ha egy gráfban nincs se párhuzamos- se hurokél, akkor egyszerű.

Pl.: Facebook. Emberek össze vannak kötve ismerőseikkel. Önmagunknak nem vagyunk ismerősei. Ugyan azt az embert nem ismerjük kétszer.

## Csúcs fokszáma

 csúcs fokszáma a rá illeszkedő élek száma. Hurokéleket duplán kell számolni. (Így lehetséges fokszámú, szomszédú csúcs.)

Jele: vagy

## Tétel: Tetszőleges G gráfban: Minden csúcs fokszáma = élek száma

Másképp felírva:

### Bizonyítás

Minden él kettővel növeli a jobb oldalt: mindkét végpontjáról 1-gyel.

## DEF: Ha egy gráfban minden csúcs foka , akkor reguláris (vagy -reguláris) gráf

Szabályos.

-reguláris gráf minden csúcs fokszáma .

Pl.: 3-reguláris gráf egy hatszög, amelyben a szemközti csúcsok össze vannak kötve (átlók behúzva).

# Séták, vonalak, utak, körök

## Séta

 hosszú séta -ból -be megy, db él van benne.

Csúccsal kezdődik, utána jön egy él, majd egy csúcs… és csúcsban végződik.

 élre a és csúcs illeszkedik. (Minden él az előtte és utána álló csúcsra illeszkedik.)

Ha egy élen többször végigmegyek, attól az még séta. Ha ilyet nem akarunk, akkor beszélünk vonalról.

### Zárt séta

Ugyanoda érkezik vissza.

### Nyílt séta

Ha nem zárt.

## Vonal

Olyan séta, ahol minden él különböző.

### Zárt vonal

Ha zárt séta

## Út

Egy séta út, ha a csúcsok is különbözőek.

"Zárt út" elnevezés nincs, elfogadott neve a kör.

## Kör

Legalább egy hosszú zárt vonal kör. Csúcsok különbözőek, kivéve a kezdő- és a végpontot ( és ).

### Példa

Legegyszerűbb: Egy pont és hurokéle. Kör: .



Kétcsúcsú: és pontok között két él, és . Kör: .



Háromszög, Négyszög, stb.

### Feladat: Hány kör van a fenti kétcsúcsú gráfban?



Négy:

De csak egy, ha "olyan két kör, amelynek az élhalmaza különböző".

### Házi feladat: Hány kör van a gráfban?



(Háromszög, alapja dupla él.)

Sok:

## Gráfok izomorfiája

Izomorfia jele:

Hasonló alakú gráfok.

 és

 izomorfak, ha:

léteznek () és kölcsönösen egyértelmű leképezések (bijekciók):

melyekre minden -re:

 illeszkedik -re illeszkedik a -re.

Két gráf izomorfiáját nehéz bebizonyítani. A gráf-izomorfizmus programozási/algoritmusi probléma nagyon nehéz. Végig kell próbálgatni.

Egyszerű gráfok esetében könnyebb. Csúcsok közti leképezés elég.

## DEF: Páros gráf

Egy gráf páros, ha

úgy, hogy minden él olyan, hogy az egyik végpontja -ben, a másik meg -ben van.

### Példa

Északon tanárok, délen termek vannak. Ez a páros gráf egy órarend.

# Speciális gráfok

Csak izomorfizmus erejéig vannak megadva.

##  Teljes gráf/Klikk

-pontú teljes gráf

n csúcs, bármelyik két különbözőt összekötjük.

##  Pálya

 n hosszú út

## C Kör

 n hosszú kör

## Páros gráf

Csúcsok halmaza két részre van osztva: és (diszjunktak)

-beliek közt nem megy él, -beliek közt nem megy él, V' és -beliek között megy él.

 "3 ház 3 kút" gráf: Ne keresztezzék egymást az utak, nem lehet síkba rajzolni.

## Részgráf

 részgráfja -nek, ha:

## Komplementer gráf

Jele a felülvonás:

 részgráfja -nek.

Ekkor -nek a -re vonatkozó komplementere:

Eredeti gráf összes csúcsa, és az összes olyan él, ami a részgráf élei közt nem szerepel.

Ha nem mondjuk, akkor a teljes gráfra vonatkozik a komplementer. (Bonyolultabban: Ha egyszerű és "simán" komplementert emlegetünk, az a csúcshalmazán értelmezett teljes gráfra vonatkozó komplementer.)

## Állítás: Ha -ből vezet séta -be, akkor út is vezet.

### Két út/séta egymás után illesztése út/séta-e?

Két út egymás után illesztve nem feltétlen út

Két séta egymás után illesztve séta.

### Bizonyítás

Van egy séta. Ha még nem út, akkor a sétában

Ezt a részt ki lehet törölni. Ezt addig ismételjük, amíg el nem fogy minden ismétlődés.

### Következmény

Ha -ből -be vezet út és -ből -ba is, akkor -ből -ba is.

Ez a "-ből -be vezet út" reláció tranzitív. Ha irányítatlan a gráf akkor szimmetrikus is.

* Reflexív: Csúcsból önmagába el lehet menni.
* Szimmetrikus: Egyikből másikba, másikból egyike.
* Tranzitív: Egyikből másikba, másikból harmadikba, akkor egyikből harmadikba.

Reflexív szimmetrikus tranzitív is ⇒ Ekvivalenciareláció.

## Feszített részgráf

 a feszített részgráfja, ha a -beli csúcsok kört menő összes G-beli élt tartalmazza.

## Komponens

Tekintsük a gráf csúcsain azt a relációt, melyre

 (akkor áll relációban), ha vezet út -ból -be.

Az szerinti ekvivalenciaosztályok által feszített részgráfok a gráf komponensei.

## Összefüggő gráf

G összefüggő, ha a reláció

Bárhonnan bárhova el lehet jutni. Vagyis csak egy komponens van.

# Fa

## DEF: Fa

Ha egy gráf összefüggő és nincs benne kör, akkor fának nevezzük.



## TÉTEL: Fa ekvivalenciák

A következő négy dolog ekvivalens. Ha tudom egy gráfról az egyiket, akkor automatikusan tudom róla a másik hármat is.

* fa
* minimális összefüggő: Bármely él törlésével kapott részgráf már nem összefüggő.
* Akárhogy veszek 2 csúcsot (), pontosan egy út vezet köztük. (-ből -be)
* körmentes, de bármely új él hozzáadásával lesz benne kör.

## Fa ekvivalenciák bizonyítása

### 1⇒2

FTH a fából törlünk egy élt, de mégis összefüggő marad. Ekkor út. Visszatéve az elhagyott élt, kör keletkezne. Ez ellentmondás.

### 2⇒3

TFH -ből -be két különböző út vezet. Legyen a két út:

Legyen az a legkisebb index, amire (A két út közös szakaszának vége.)

Ekkor vagy törölhető, de nem esik szét a gráf. Ez ellentmondás.

### 3⇒4

Ha lenne kör, akkor az' két utat jelentene a kör minden pontja között.

Ha hozzáveszek egy új élt és között, akkor kör keletkezne, mert eddig is volt köztük út.

### 4⇒1

Kell: G összefüggő.

TFH és közt nincs út. Kössük össze őket! Az új éllel kört kapunk. Ellentmondás. Lenne út és között.

## TÉTEL: Fa ekvivalenciák 2

Egy véges, pontú gráfra ekvivalens a következő három állítás:

* G fa
* G körmentes és éle van. (n csúcsú)
* G összefüggő és éle van

Bizonyítás következő előadáson.

## DEF: gráfnak a részgráfja a feszítőfája, ha fa és az összes csúcsot tartalmazza

### Állítás: Minden véges gráfnak van feszítőfája

Bizonyítás: Amíg van kör, hagyjuk el egy élét.

## Fa ekvivalenciák 2 bizonyítása

Triviális

 egyszomszédos csúcs, szomszédja a

Töröljük ezt a csúcsot, és az élt, ami -be vezetett.

A maradék gráfban 1-gyel kevesebb csúcs van. Ez a gráf is fa.

Ennek az n-1 csúcsú gráfnak n-2 éle van.

Visszatesszük a törölt élt és csúcsot. Q. E. D.

###  él van és körmentes

Ha nem lenne körmentes, akkor a körnek akármelyik élét kitörölve összefüggő marad.

Ha még ez se körmentes, törlünk még egy élt, egészen addig, míg körmentes.

 db élt töröltünk ki. n-csúcsú fát kaptunk éllel

De csak 0 lehet. Q. E. D.

# Tavaly volt, idén nem

Csúcsok részhalmaza:

 Egyik végpontja benne van -ben, a másik meg komplementerben.

##  Csillag/Star

Középpontot mindennel.

##  Hiperkocka

…

## Egyszerű gráfok Descartes szorzata

Minden csúcs össze van kötve, ami csak egy koordinátában van összekötve.

## Informatikában masszív paralel gépekben Tórusz

 processzort is kötöttek már össze.

## Kör

Zárt vonal (minden él különböző), és a csúcsok is különböznek.

Az első és utolsó megegyezik.

1 hosszú kör: hurokél.

2 hosszú kör: 2 párhuzamos él.

n hosszú kör: n-szög

## Távolság két csúcs között

Legrövidebb séta, ami elvisz az egyikből a másikba.

Ha nincs ilyen, akkor .

## Gráf átmérője

Csúcspontok távolságainak szuprémuma (a leghosszabb távolság)

Ha van ∞ távolság, akkor ∞ az átmérő.

## Bármely gráfban különböző és csúcsokat összekötő sétából alkalmasan törölve párokat, a -t -vel összekötő utat kaphatunk.

Egyre rövidebb és rövidebb sétát kapunk, amíg út lesz belőle.

## Legalább egy hosszúságú zárt vonal véges sok páronként éldiszjunkt kör egyesítése.

Az ismétlődő csúcsnál kettévágom, amíg nincs több ismétlődő csúcs.

## Véges gráfban nincs kör, de van él, akkor van legalább két elsőfokú csúcs (pontosan elsőfokú csúcs)

Van benne egy hosszú út.

Válasszuk a leghosszabbat, ez legalább 1 hosszú és -ből -be vezet.

Ekkor és elsőfokúak.