

Műveletek nyelvekkel

Formális nyelvek, 3. gyakorlat

Célja: A formális nyelvek elmélete alapfogalmainak elmélyítése, a műveletek gyakorlása

Fogalmak: Műveletek szavakon, nyelveken, reguláris műveletek, halmazműveletek, homomorfizmus, helyettesítés, párhuzamos kompozíció

Feladatok jellege: A műveletek bemutatása konkrét nyelvekre való alkalmazásukon keresztül, műveletekre vonatkozó azonosságok felismerése, bizonyítása.

2008/09 I. félév

Házi feladatok megoldása

1. feladat

Írjunk programot, mely kirajzolja $n = 4$ -ig

a. a Koch szigeteket

b. a következőt: $\omega_0 = F+F+F+F$,

$$h(F) = F+f-FF+F+FF+Ff+FF-f+FF-F-FF-Ff-FFF$$

$$h(f) = fffff, \quad h(+)=+, \quad h(-)=-.$$

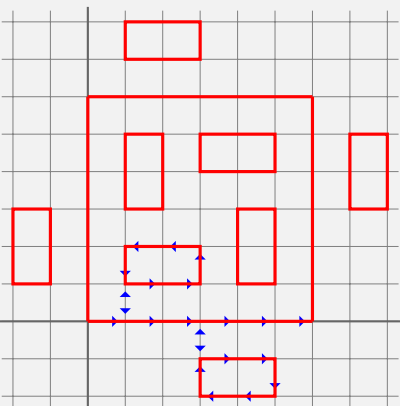
Házi feladatok megoldása

1. feladat

b. $\omega_0 = F+F+F+F$, $\omega_i \rightarrow \omega_{i+1}$:

$$h(F) = F+f-FF+F+FF+Ff+FF-f+FF-F-FF-Ff-FFF$$

$$h(f) = fffff, \quad h(+)=+, \quad h(-)=-.$$



Házi feladatok megoldása

2. feladat

$$(L_1 L_2)^{-1} = L_2^{-1} L_1^{-1}.$$

Megoldás:

$(uv)^{-1} = v^{-1}u^{-1}$, ugyanis ha $u = x_1 \dots x_k$, $v = y_1 \dots y_\ell$, akkor $uv = x_1 \dots x_k y_1 \dots y_\ell$, és $(uv)^{-1} = y_\ell \dots y_1 x_k \dots x_1 = v^{-1}u^{-1}$.

$$\text{Tehát: } (L_1 L_2)^{-1} = \{(uv)^{-1} \mid u \in L_1, v \in L_2\} = \{v^{-1}u^{-1} \mid u^{-1} \in L_1^{-1}, v^{-1} \in L_2^{-1}\} = L_2^{-1} L_1^{-1}.$$

Megjegyzés: $(u_1 \dots u_n)^{-1} = u_n^{-1} \dots u_1^{-1}$ hasonlóan igazolható.

$$\begin{aligned} \text{Következmény: } (L_1 L_2 \dots L_n)^{-1} &= L_n^{-1} \dots L_2^{-1} L_1^{-1} \\ (L^n)^{-1} &= (L^{-1})^n \\ (L^*)^{-1} &= (L^{-1})^*. \end{aligned}$$

Házi feladatok megoldása

3. feladat

x palindrom $\Leftrightarrow x^k$ palindrom ($k \geq 1$).
(x palindrom, ha $x = x^{-1}$)

Megoldás:

“ \Rightarrow ”

x palindrom $\Rightarrow x = x^{-1} \Rightarrow (x^k)^{-1} = (x^{-1})^k = x^k$.

“ \Leftarrow ”

x^k palindrom $\Rightarrow x^k = (x^k)^{-1} \Rightarrow x^k = (x^{-1})^k$.

Tehát speciálisan x^k és $(x^{-1})^k$ első $\ell(x)$ betűje megegyezik, azaz $x = x^{-1}$.

Reguláris kifejezések

A reguláris kifejezések definíciója

Reguláris kifejezések alatt az $(U \cup \{\emptyset, \varepsilon, (,), \cup, * \})^*$ halmaz legszűkebb olyan \mathcal{R} részhalmazát, melyre:

- az \emptyset és az ε szimbólum eleme \mathcal{R} -nek,
- minden $a \in U$ -ra az a szimbólum eleme \mathcal{R} -nek,
- ha $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$, akkor $(R_1 \cup R_2)$, $(R_1 R_2)$ és $R_1^* \in \mathcal{R}$.

Ha hangsúlyozni akarjuk, hogy a reguláris kifejezés a T ábécé betűiből építkezik, akkor a **T feletti reguláris kifejezések** $\mathcal{R}(T)$ halmazáról beszélünk.

Megjegyzés: Gyakran használatos „ \cup ” helyett a „+” jelölés is.

Reguláris kifejezések

A reguláris kifejezések értelmezése

- $R = \emptyset$ az $L = \emptyset$ nyelvet,
- $R = \varepsilon$ az $L = \{\varepsilon\}$ nyelvet,
- $R = a$ az $L = \{a\}$ nyelvet reprezentálja.

Ha R_1 illetve R_2 az L_1 illetve L_2 nyelvet reprezentálja, akkor

- $(R_1 \cup R_2)$ az $L_1 \cup L_2$ nyelvet,
- $(R_1 R_2)$ az $L_1 L_2$ nyelvet,
- R_1^* az L_1^* nyelvet reprezentálja.

Az R reguláris kifejezés által reprezentált nyelvet $L(R)$ -rel jelöljük.

A zárójeleket akkor írjuk ki, ha szükségesek (műveletek prioritási sorrendje: *, konkatenáció, unió). $R^+ = RR^*$ és használhatjuk a természetes egész kitevőket, amivel az adott reguláris kifejezés kitevőszörös önmagával vett konkatenációját rövidítjük. (Például $(a^* b)^3 = a^* b a^* b a^* b$.)

Reguláris kifejezések

Példák

1. Feladat: Írjuk le szavakkal és/vagy formulákkal az alábbi reguláris kifejezések által meghatározott nyelveket!

- a. $0(0 \cup 1)^* 1$ $\{0u1 \mid u \in \{0, 1\}^*\}$
- b. $((a \cup b)^* a (a \cup b)^*)^+$ $\{uav \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$
- c. $(\varepsilon \cup 1)^* 0^* 001(111)^*$ $\{1^n 0^{k+2} 1^{3m+1} \mid n, k, m \in \mathbb{N}\}$

2. Feladat: Alkossunk reguláris kifejezéseket a következő nyelvekhez!

- a. $\{u \in \{0, 1\}^* \mid u$ legalább egy 1-et tartalmaz} $(0 \cup 1)^* 1 (0 \cup 1)^*$
- b. $\{u \in \{c, d\}^* \mid u$ második betűje c , vagy pontosan két d -t tartalmaz} $(c \cup d)c(c \cup d)^* \cup c^* dc^* dc^*$
- c. $\{a^{2n+1} b \mid n \in \mathbb{N}\}^*$ $((a^2)^* ab)^*$
- d. $\{u \in \{0, 1\}^* \mid u$ páros sok 1-et tartalmaz} $(0^* 10^* 1)^* 0^*$

Műveletek nyelvek között

Tartalmazási problémák

3. Feladat:

$$L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a^{2n+1} b \mid n \geq 0\}$$

$$1. \quad \{a^n b^n a^n b \mid n \geq 0\} \stackrel{?}{\subseteq} L_1 L_2 \quad \not\subseteq$$

$$2. \quad \{a^n b^n a^{2n+1} b \mid n \geq 0\} \stackrel{?}{\subseteq} L_1 L_2 \quad \subseteq$$

$$3. \quad \{(a^n b^n)^n \mid n \geq 0\} \stackrel{?}{\subseteq} L_1^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_1^i \quad \subseteq$$

$$4. \quad \{(ab)^n \mid n \geq 0\} \stackrel{?}{\subseteq} L_2^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_2^i \quad \not\subseteq$$

Műveleti tulajdonságok

Monotonitási tulajdonságok, a konkatenáció unióra való disztributivitása

$$1. \quad \{L_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \{L'_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \forall \lambda \in \Lambda : L_\lambda \subseteq L'_\lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} L'_\lambda$$

$$2. \quad \Lambda = \{1, 2, \dots, n\}, L_i \subseteq L'_i \Rightarrow L_1 L_2 \dots L_n \subseteq L'_1 L'_2 \dots L'_n$$

$$3. \quad L \subseteq L' \Rightarrow L^* \subseteq (L')^*$$

$$4. \quad \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda\right)L = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda L$$

$$5. \quad \text{Nem igaz! } L_1(L_2 \cap L_3) = L_1 L_2 \cap L_1 L_3$$

$$\text{Pl. } L_1 = \{a, \varepsilon\}, L_2 = \{a, a^2\}, L_3 = \{a^3, a^4\}$$

További műveletek

Prefix, suffix:

$$4. \text{ Feladat: } L = L((a^2)^* ab),$$

$$a. \quad \text{Pre}(L) = ? \quad a^* \cup (a^2)^* ab$$

$$b. \quad \text{Suf}(L) = ? \quad a^* b \cup \varepsilon$$

Homomorfizmus:

Konkatenációtartó szót szóba vivő leképezés. (Ilyenkor elég a betűk képét megadni.)

$$5. \text{ Feladat: } L = \{(ab)^n b^{2n+1} \mid n \geq 0\}, h(a) = xyy, h(b) = yy$$

$$h(L) = \{(xy^4)^n y^{4n+2} \mid n \geq 0\}$$

További műveletek (jegyzetben):

Helyettesítés, párhuzamos kompozíció

Példák formális nyelvek megadására

• Felsorolással:

$$L_1 = \{ab, ba, abba, ca\}$$

• Felsoroló algoritmussal:

$$L_4 = T^*$$

• Formulával:

$$L_2 = \{u \mid u \in \{a, b\}^* \wedge \ell_a(u) = \ell_b(u)\}$$

Lexikografikusan felsoroljuk T^* elemeit. Például ha

• Reguláris kifejezéssel:

$$L_3 = L((ab \cup (ba)^*)^*)$$

$T = \{0, 1\}$, akkor $T^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}$

• Generatív nyelvtanokkal (grammatikákkal) (bővebben köv. órán):

Pl. volt BNF:

$$\langle \text{azonosító} \rangle ::= \langle \text{betű} \rangle \langle \text{az.vég} \rangle$$

$$\langle \text{betű} \rangle ::= a \mid b \mid c \mid \dots \mid z$$

$$\langle \text{az.vég} \rangle ::= \mid \{ \langle \text{betű} \rangle \mid \langle \text{sz.jegy} \rangle \} \langle \text{az.vég} \rangle$$

$$\langle \text{sz.jegy} \rangle ::= 0 \mid 1 \mid \dots \mid 9$$

Nyelvtan:

$$S \rightarrow AC$$

$$A \rightarrow a \mid b \mid c \mid \dots \mid z$$

$$C \rightarrow AC \mid BC \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow 0 \mid 1 \mid \dots \mid 9$$

$$L_5 = \{\text{levezethető terminális sorozatok (szavak)}\}$$

• Matematikai gépek, automaták segítségével (félév második felében)

Példák formális nyelvek megadására

Rekurzív és parciálisan rekurzív nyelvek

Milyen $T = \{a\}$ ábécé feletti nyelvet írnak le az alábbi algoritmusok?
Melyik rekurzív illetve parciálisan rekurzív?

A1(u)

$n := 1$	
$n^2 < \ell(u)$	
Príme($\ell(u) - n^2$)	
Return(Igen)	$n := n + 1$
Return(Nem)	

A1(u) által generált nyelv:
 $L_5 = \{a^j \mid j = n^2 + p, p \text{ prím}\}$

Rekurzív nyelv

A2(u)

$n := \lceil \sqrt{\ell(u)} \rceil$	
TRUE	
Príme($n^2 - \ell(u)$)	
Return(Igen)	$n := n + 1$

A2(u) által generált nyelv:
 $L_6 = \{a^j \mid j = n^2 - p, p \text{ prím}\}$

Parciálisan rekurzív nyelv

Házi feladat

1. $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, $L_2 = \{ab\}$. $L_2^* \stackrel{?}{\subseteq} L_1^*$.
2. $L^* = L^* L^*$.
3. $(L^*)^* = L^*$.
4. $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* L_2^*)^*$.
5. Igaz-e minden L nyelvre és h homomorfizmusra?
 $h(L^{-1}) \stackrel{?}{=} h(L)^{-1}$.
6. Adjunk reguláris kifejezést a legfeljebb 3 darab a -t tartalmazó $\{a, b\}^*$ -beli szavakra!