## Jövő héten elmarad

Március 22-én találkozunk legközelebb.

Bepótoljuk. Mikor?

## ZH

Csoportelmélet után. Még 2 órát tartunk legalább. Szünet után lesz.

Témakör: Gráfok és csoportok, morfizmusok, geometriai példák.

# Gráfok

## Véges egyszerű gráfok éllistás ábrázolása

 csúcsok nevei, élek nevei, leképezés, amely megmondja, hogy melyik élnek mi a kezdő és végpontja: (e, v, v') hármas.

Minden csúcshoz tartozik az élek láncolt listája, amely abból a csúcsból indul ki.

Láncolt listák listája.

Csúcsokat megszámozzuk.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  | … |  | null pointer |
|  |  |
|  |
|  |

### Memóriaigény

Ha darab él van:

 darab adatrész, és darab pointer

Irányítatlan gráfnál, mivel oda vissza behúzzuk az éleket: pointer, és adatrész

### Adott él benne van-e

Megkeressük a listafejek között az -t.

Elindulok -ből és végignézem a hozzá tartozó élek listáját. Futásidő:

Lineáris időben.

Kiindulva egy adott csúcsból, minden élre csináljunk valamit.

Ez is konstans időben kész.

# Irányított fák



Kitüntetett csúcsból indul. Ez a gyökér.

## Gyökér

csúcs, amelynek befoka 0:

 Többi csúcsnak befoka 1.

Gyökérből egyféleképpen jutunk el mindenhova.

## Szint

## Magasság

## Szülő, gyerek, testvér

## Levél

Csúcs kifoka 0.

## -ad rendű fa

 él címkéje

## Bináris fa

Minden él címkéje vagy .

Jobb / bal kimenő él.

## Kupac

Speciális -ad rendű irányított fa, amely speciálisan van rendezve.

Forrásból vannak rekordjaink:

Csak a rekord kulcsával foglalkozunk.

f fa esetén teljesül kupac tulajdonság.

## Bináris kupac



Gyerekben levő rekord soha ne legyen kisebb a szülőnél.

## Műveletek kupacban

### Beszúrás

 kupacba rekordot

Mindig üres levelek alá kötjük az új elemeket.

Az új él mentén elromlik a kupac tulajdonság, ezt helyreállítjuk. (Felbillegtetjük)

Felbillegtetés: Csere, amíg minden él mentén meg nem javul a kupac tulajdonság.

### Törlés

Legkisebb kulcsú rekordot akarjuk törölni.

 a minimum kulcsú rekord

 egy levél (általában a legutolsó a tömbben)

Elromlik a kupac tulajdonság, valami nagy kerül felülre. lebillegtetjük

Lebillegtetés: Két testvért összehasonlítjuk, a kisebbel cseréljük.

## Elemzés - Bináris fában a lépésszám

-csúcsú fa maximum mélysége:

Felbillegtetésben az összehasonlítások száma maximum (≤):

Lebillegtetésben az összehasonlítások száma maximum (≤):

A logaritmus q-alapú, tehát itt 2.

Mindkét művelet időben megoldható.

## Kupacrendezés

Felépítünk egy kupacot, mintörléssel kiszedjük az elemeket, az így kapott fa monoton nő.

# Gráfok

## Euler-vonal

Véges gráf (irányítatlan)

Van-e benne Euler-vonal?

Euler vonalban minden él pontosan egyszer szerepel.

### "Euler-kör"

Speciális eset, . Ez a zárt Euler vonal, vagy az Euler kör.

De ez nem igazi kör, hiszen Euler vonalban nem csak egyszer szerepelhetnek a csúcsok.

### Szükséges feltételek

 és fokszámainak páratlannak kell lennie.

Elindulás fok, -szor belé futunk az fok, tehát v 2k+1 fokú

Érkezés fok, -szor belé futunk, az fok, tehát v' is 2k+1 fokú

Minden más pontnak páros a fokszáma.

Euler kör esetén: Minden csúcs páros fokszámú.

Ha ez a gráf összefüggő, akkor ezek a feltételek nem csak szükségesek, de elégségesek is az Euler körhöz.

## Feladat: Létezik-e olyan egyszerű összefüggő gráf, hogy van benne Euler kör? páros, páratlan.

Először a feladat nem kérte, hogy összefüggő legyen, könnyen megoldottuk:



 összefüggő. páros

Páros sok páros számot adok össze⇒páratlan van.

 páros ⇒ rossz

 páratlan ⇒ rossz

Egyetlen lehetőség: Páratlan sok páros van.⇒ Páratlan sok páratlant adok össze.

Többi legyen 1

⇒

⇒

6 csúcsa van, egy negyedfokú csúcs van benne



## Feladat: Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy irányítatlan gráf élei irányíthatóak legyenek úgy, hogy az adott irányításra minden csúcs kifoka és befoka megegyezik?

Szükséges feltétel: páros

Elégséges feltétel: ennyi.

 komponensre: legyen az irányítás az bejárása szerint. Ez a feltétel elégséges is lesz.

Tehát vagy egy kör vagy egy összetett kör. Egyszerű kör már kész. Ha összetett kör, akkor a komponensek Euler körének irányítása szerint.

## Összetett kör

 irányítatlan gráf. részgráf egyszerű kör

Különben ez a kör összetett kör páros

 összetett kör egyszerű körökre partícionálható (bontható).

## Éldiszjunkt unió

 egyszerű kör esetén szimmetrikus differencia.

(?)

→

→

## Hamilton-kör

Csúcsokon egyszer megy át.

# Csoportok

## Grupoid

G alaphalmaz, benne egy művelet ∘ binér/bináris művelet.

Ez a kettes jelölve: (G,∘)

### Bal oldali semleges elem

### Jobb oldali semleges elem

### Semleges elem

Több bal és jobb oldali semleges elem lehet, de csak egy van, ami bal és jobb oldali is.

## Félcsoport

### Asszociativitás

Átzárójelezhetőség

## Monoid

Egységelemes félcsoport.

## Csoport

Algebrai struktúra.

Minden elemének van inverze:

### Inverz

 baloldali inverz:

Jobb oldali hasonlóan

Inverz, ha

## Ábel-csoport

Kommutatív a művelet.

### Kommutatív

## Jelölés

### Additív

+; nullelem=0; inverz=-g

### Multiplikatív

\*; egységelem=1; inverz=1/g vagy

## Példa -

+ additív binér művelet

Nullelem a 0.

Asszociatív.

Inverz nincs, kivezet.

Kommutatív additív félcsoport 0 nullelemmel. De nem csoport.

## Példa -

Multiplikatív kommutatív félcsoport.

Nincs inverz, mert az osztás kivezet.

## Példa -

Additív Ábel-csoport, mert van inverz.

## Példa -

Multiplikatív Ábel-csoport

Elég lenne a is.

## Példa -

 binér művelet.

Asszociativitás teljesül: logikai tartalmazással bizonyítjuk.

Kommutativitás:

De: Általában nincs ilyen. Ha A a teljes halmaz, akkor inverze önmaga.

Megj: X helyett végig 𝒫(X)-et kellett volna írni.

## Példa -

 binér művelet.

Nem asszociatív.

Nem kommutatív.

Semleges elem: nincs. Jobb oldalon az ∅ semleges.

## Példa -

X alaphalmaz;

 binér -re, mert

Egységelemes félcsoport, ami nem kommutatív.

Egységelem: van ilyen: identikus leképezés:

Asszociativitás: van

Inverz nincs, mert nem tudunk semmit f-ről. Nem is biztos, hogy invertálhatók.

Speciálisan, ha minden f bijektív, akkor Csoport.

Kommutativitás: nincs. Ellenpélda: exp függvény és a köb függvény kompozíciója.

## ZH példa -

Bináris művelet \*: -be képez.

Bal oldali semleges elem:

Jobb oldali semleges elem:

Semleges elem

Asszociativitás: (Nem írtam le.)

Inverz: nincs

Ha , akkor , de más esetben nincs inverz.

## Pluszminusz mindenkinek rosszul sikerült - hiperkocka

 (n hosszú bit)