TODO nyíl?

Szisz Dániel [orlando@caesar.elte.hu](mailto:orlando@caesar.elte.hu)

Kezdés: 11:00

Idő: 45 perc - 15 perc szünet - 90 perc.

## Követelményrendszer

2 db ZH

Pluszminusz lesz-e, ma derül ki. Definíció vagy egyszerű feladat.

## Témák

Gráfok, Algebra, Bonyolultságelmélet (kódolás, számítógépes modellek, Turing- és RAM-gép)

## Jelenléti ív

Nyomtatok egy jobb jelenléti ívet

# Gráfelmélet

Csúcsok halmaza (Vertex)

Élek halmaza (Edge)

Számosság: milyen gráfról van szó

Leképezés: Illeszkedési reláció ha illeszkedik -re.

rendezett hármas vagy (V, E) a gráf (irányítatlan)

az él és a csúcshalmaz számossága, adott gráfban hány csúcs/él van

Véges gráf

## Példa

TODO drawing2graph[1]

## Egyszerű él

## Hurokél

## Párhuzamos él

Két csúcs között egynél több él fut

## Egyszerű gráf

gráf egyszerű nincs benne hurok/párhuzamos él

## Fokszám

vagy az adott csúcsra illeszkedő élek száma a csúcs foka

Hurokélek kétszer számítanak.

## Véges gráf fokszámainak összege

Minden él 2x számít.

## Fokszámok eloszlása egyszerű gráfban

egyszerű gráf

legalább 2 csúcsa van

van benne két egyenlő fokú csúcs

Indirekt bizonyítás. TFH ellentettjét:

∃G:

Minden csúcs foka különböző kell, hogy legyen.

Legyen (csúcsok halmaza véges)

Legyen

A maximális élszám , mert egyszerű gráf.

⇒ Egyféleképpen lehet elosztani:

Próbáljuk megépíteni ezt a gráfot!

Ellentmondás, nem tudjuk.

## Gráfban páratlan fokú csúcsok száma páros

Véges gráf fokszámainak összegéből triviálisan következik.

Üres gráfban nincs páratlan fokú pont.

TODO drawing2graph[2]

Beteszünk egy új élt:

Ha páros fokszámú élek közé rakjuk ⇒ 2-vel nő a páratlan fokú csúcsok száma.

Ha egyik páros másik páratlan ⇒ paritás megcserélődik

## Teljes gráf (Klikk)

-pontú/csúcsú teljes gráf

G teljes ⇔ Bármely két csúcsa között megy él.

## Ciklus / egyszerű kör

-pontú/csúcsú egyszerű kör/ciklus.

Csak a szomszédos élek között megy él, "zárt".

## Példák

TODO drawing2graph[3]

TODO drawing2graph[4]

TODO rajz.

TODO drawing2graph[5]

TODO drawing2graph[6]

TODO drawing2graph[7]

TODO drawing2graph[8]

## Ösvény

-pontú ösvény

-ből egy él törlésével megkapható.

# Műveletek

## Részgráf

gráf, gráf

részgráfja -nek, ha

## Telített részgráf

…

## Komplementer

gráf, gráf

-nek -re vett komplementere:

Általában a teljes gráfra vonatkozik a komplementer:

## Mutassuk meg, hogy 6 csúcsú (szögpontú) egyszerű gráf vagy komplementere (-ra) tartalmaz -mat. (3 pontú teljes részgráfot)

TODO drawing2graph[9]

1. van -ben kész
2. Nincs -ben, válasszunk 3 tetszőleges csúcsot: , egy él hiányzik, ez benne lesz a komplementerben. Válasszunk egy negyediket, w
   1. TFH csak 2 él van G-ben ⇒
   2. majd később

# Gráfok típusai

## Séta

, n hosszú séta -ből -be  
⇔

Élek és a csúcsok is ismétlődhetnek.

séta -ből -be:

## Zárt séta

"Bezáródik"

## Nyílt séta

Ha nem zárt.

## Vonal

Zárt/nyílt vonal létezik.

## Út

Út egyben vonal is.

Élek és csúcsok is különbözőek (?)

## Kör

kör zárt út

## Példa sétára, vonalra, útra, körre

TODO drawing2graph[10]

zárt séta, (nem út, nem vonal)

vonal, (nem út)

út

kör

## , C kör

(Véges gráfban minden csúcs legalább másodfokú, akkor tartalmaz kört)

Véges gráf fokszámainak összege tétel alapján:

## -ben kör

Legalább annyi él van benne, amennyi csúcs.

irány: kör -benzárt út -ben

irány: üres gráfba éleket húzunk: 5 él 6 csúcsú gráfban, be kell húznunk a 6. élt:

TODO rajz.

irány: Felépítve a gráfot, utakat építünk, de marad legalább egy behúzatlan él, zárni kell valahol mivel a gráf egyszerű, létre jön egy kör.

## Séta redukálása úttá

gráf, csúcsok. TFH séta -ből megadható út

-ben ha találunk (Sétán visszajutottunk egy már érintett csúcsba.)

Akkor a közbülső éleket () kitöröljük. (Ez a kitörölt rész mindig egy kör.)

## Út/séta hossza:

, benne séta

séta hossza, azaz (séta éleinek halmazának számossága)

## Tetszőleges páratlan hosszú zárt sétában van kör

G gráf, páratlan hosszúságú zárt séta G-ben, ekkor tartalmaz kört.

zárt séta

az séta (zárt, mert a két végpont megegyezik)

Legyen a sétában -t megelőző csúcs. Vágjuk át a élet megszűnik a zártság, nyílt séta lesz

, ezért redukálása után út + a él bezárja a kört.

(Nyílt sétában mindenképpen megadható egy út.)

### Példa

TODO drawing2graph[11]

Vágjuk át a élt.

## Gráfok összefüggősége

gráf; összefüggő, ha séta Bármelyik két csúcsa összeköthető sétával. út (Igaz utakra is.)

reláció

(f: összeköthető-e két csúcs úttal a gráfban)

Ez egy ekvrel:

Reflexív: összeköthető önmagával

Szimmetrikus: ha összeköthető -vel, akkor is -val.

Tranzitív: és összeköthető ∧ v és w összeköthető ⇒ u és w is összeköthető

Telített részgráf ekvivalenciaosztályai a gráf komponensei.

Két komponens között nem mehet él. A csúcsok egy ekvivalenciaosztályba tartoznának.

Minden él egyértelműen besorolható egyetlen komponensbe.

Összefüggő akkor is, ha egy komponense van, azaz az egyetlen komponens.

## Ekvivalencia sorozat a fákkal kapcsolatban

fa, ha összefüggő és kör

Az alábbiak ekvivalensek egy gráfra:

1. fa
2. összefüggő, de már nem összefüggő. (Kitöröljük a gráf egy tetszőleges élét))
3. -nek nincs köre, de már tartalmaz kört. ( = új, nem szereplő él)

### 1.⇒2. Fában pontosan (csúcs-1) él van.

Láttuk, hogy -ben kör

Fa esetén vagyis

Sőt, mivel összefüggő

Fában kör.

### 2.⇒3. Indirekt bizonyítás

TFH (Legalább 2 út összeköti a tetszőleges csúcsokat)

Vágjuk át egy adott élét. még mindig megvan. Ellentmondás: Még mindig összefüggő lenne.

### 3.⇒4. Indirekt.

TFH kör.

Ekkor és csúcs között út egyféleképpen és út másféleképpen mehet -be. Ez ellentmondás, két út nem lehet és között.

### 4.⇒1.

…

Ebből adódik az ekvivalencia.