Járai Antal <http://compalg.inf.elte.hu/~ajarai/>

Kezdés: 12:10, két 10 perces szünet

## Követelményrendszer

Tankönyv: Bevezetés a matematikába 7-8-9-(10)

MAPLE

12 előadás lesz, 4-ről lehet hiányozni

Pluszminusz minden gyakorlaton lesz.

# Gráfelmélet

Bizonyos kapcsolat létezése vagy nem létezése. Pl.: Sakktábla bejárható-e huszárral? Kiszínezhető-e egy térkép négy színnel? Hány gép eshet ki egy hálózatból maximum, hogy még mindig átmenjen az információ?

## Irányítatlan gráf

Csúcsok (pontok)

Élek (pontokat kötnek össze)

### Ábrázolás számítógépen

Bevisszük a csúcsokat, éleket és minden élhez, hogy melyik két csúcsot köti össze

fi illeszkedési leképezés: (-beli elemek rendezetlen párosa)

kihagyható, mert elég.

nem kihagyható, mert nem minden v végpont. (Izolált csúcsok)

lehet , ekkor üres a gráf.

A fi leképezés reláció, mert több csúcsot köthet többhöz.

## Szomszédos él

1 közös csúcs

## Szomszédos csúcs

Van olyan él, hogy összeköti

## Hurokél

Egy csúcsra illeszkedik.

## Párhuzamos él

2 közös csúcs (ugyanazok a végpontjai)

## Egyszerű gráf

Nem tartalmaz hurok- és párhuzamos- éleket.

## Véges gráf

V, E is véges.

## Végtelen gráf

Ha nem véges.

Csúcsok részhalmaza:

Egyik végpontja benne van -ben, a másik meg komplementerben.

## Fokszám

Hány él illeszkedik a csúcsra. Hurokéleket kétszer számoljuk.

vagy

## Reguláris gráf

Szabályos. Pl.: n-reguláris gráf minden csúcs fokszáma n.

## Minden csúcs fokszáma = 2 \* élek száma

## Gráfok izomorfiája

Hasonló alakú

kölcsönösen egyértelmű leképezések:

illeszkedik -re illeszkedik -re.

Két gráf izomorfiáját nehéz bebizonyítani. Végig kell próbálgatni. Egyszerű gráfok esetében könnyebb. Csúcsok közti leképezés elég.

## Teljes gráf/Klikk

Minden csúcsot él köt össze.

Két teljes gráf izomorf, ha csúcsok száma megegyezik.

n csúcsú teljes gráfban él van.

## Ciklus/Kör

Szomszédokat él köt össze

## Ösvény/Pálya

-ből egy élet törlök.

## Csillag/Star

Középpontot mindennel.

## Hiperkocka

…

## Egyszerű gráfok Descartes szorzata

Minden csúcs össze van kötve, ami csak egy koordinátában van összekötve.

## Informatikában masszív paralel gépekben Tórusz

processzort is kötöttek már össze.

## Páros gráf

Csúcsok halmaza két részre van osztva: és (diszjunktak)

-beliek közt nem megy él, -beliek közt nem megy él, V' és -beliek között megy él.

"3 ház 3 kút" gráf: Ne keresztezzék egymást az utak, nem lehet síkba rajzolni.

## MAPLE networks csomag

Gráfokat tud kezelni.

## Részgráf

Eredeti gráf része, ami maga is gráf. Kevesebb élhez van hozzárendelve kevesebb csúcspár.

Adott csúcshalmaz által feszített részgráf.

Élhalmaz által feszített részgráf is van.

Élhalmaz törlésével kapott gráf is van. Csúcshalmaz törlésével kapott gráf (ilyenkor élek is elvesznek) is van.

## Komplementer gráf

Eredeti gráf összes csúcsa, és az összes olyan él, ami a részgráf élei közt nem szerepel.

Ha nem mondjuk, akkor a teljes gráfra vonatkozik a komplementer.

## Séta

hosszú séta: db él van benne. Minden él az előtte és utána álló csúcsra illeszkedik.

Csúccsal kezdődik, utána jön egy él, majd egy csúcs… és csúcsban végződik.

-ből -be, vagy -ból -be megy.

A séta nem részgráf.

Más elnevezések: út, élsorozat, nem olyan jók.

### Zárt séta

Ugyanoda érkezek vissza.

### Nyílt séta

Ha nem zárt.

## Vonal

Olyan séta, ahol minden él különböző.

### Zárt vonal

Ha zárt séta

## Út

Olyan séta, ahol a csúcsok mind különbözőek.

0 és 1 hosszú séta mind út.

## Kör

Zárt vonal (minden él különböző), és a csúcsok is különböznek.

Az első és utolsó megegyezik.

1 hosszú kör: hurokél.

2 hosszú kör: 2 párhuzamos él.

n hosszú kör: n-szög

## Távolság két csúcs között

Legrövidebb séta, ami elvisz az egyikből a másikba.

Ha nincs ilyen, akkor .

## Gráf átmérője

Csúcspontok távolságainak szuprémuma (a leghosszabb távolság)

Ha van ∞ távolság, akkor ∞ az átmérő.

## Bármely gráfban különböző és csúcsokat összekötő sétából alkalmasan törölve párokat, a -t -vel összekötő utat kaphatunk.

Egyre rövidebb és rövidebb sétát kapunk, amíg út lesz belőle.

## Legalább egy hosszúságú zárt vonal véges sok páronként éldiszjunkt kör egyesítése.

Az ismétlődő csúcsnál kettévágom, amíg nincs több ismétlődő csúcs.

## Összefüggő gráf

Bárhonnan bárhova el lehet menni egy sétával

Bármely két csúcs összeköthető sétával.

Ha sétával lehet, úttal is lehet.

Ugyanabba a csúcsba 0 hosszú úttal megyünk.

Az a reláció két csúcs között hogy el lehet menni sétával (úttal is), vagy nem, az ekvrel.

Reflexív: Csúcsból önmagába el lehet menni.

Szimmetrikus: Egyikből másikba, másikból egyike.

Tranzitív: Egyikből másikba, másikból harmadikba, akkor egyikből harmadikba.

Az ekvivalenciaosztályok neve: komponensek

Két különböző osztályba tartozó csúcs nem lehet szomszédos.

Ha egy komponens van; a gráf összefüggő.

## Fa

Összefüggő (bármely pontból bármely pontba vezet séta) gráf és nincs köre.

Lehet végtelen is. Pl.: Számegyenesen a szomszédos egész számokat összekötöm.

## Fa ekvivalenciák

G fa

G minimális összefüggő: Bármely él törlésével kapott részgráf már nem összefüggő.

Akárhogy veszek 2 csúcsot, csak egy út vezet köztük.

G-nek nincs köre, de bármely új él hozzáadásával kört kapok.

## Fa ekvivalenciák bizonyítása

### 1⇒2

Ha egy él törlésével összefüggő maradna, kör lenne.

### 2⇒3

Ha két út vezetne, az egyikből törölhetnék pár élt és mégis összefüggő maradna.

### 3⇒1

Ha van kör, két út vezetne a kör pontjai között. (Egyik/másik irányban.)

### 4

Ez az új él vagy hurokél vagy és között húzzuk be. De ez már két út és között. Vagy párhuzamos él vagy nagyobb, de mindenféleképpen kör.

## Véges gráfban nincs kör, de van él, akkor van legalább két elsőfokú csúcs (pontosan elsőfokú csúcs)

Van benne egy hosszú út.

Válasszuk a leghosszabbat, ez legalább 1 hosszú és -ből -be vezet.

Ekkor és elsőfokúak.

## Fa ekvivalenciák 2

G fa

G-ben nincs kör és n-1 éle van. (n csúcsú)

G összefüggő és n-1 éle van

## Fa ekvivalenciák 2 bizonyítása

Triviális

egyszomszédos csúcs, szomszédja a

Töröljük ezt a csúcsot, és az élt, ami -be vezetett.

A maradék gráfban 1-gyel kevesebb csúcs van. Ez a gráf is fa.

Ennek az n-1 csúcsú gráfnak n-2 éle van.

Visszatesszük a törölt élt és csúcsot. Q. E. D.

### él van és körmentes

Ha nem lenne körmentes, akkor a körnek akármelyik élét kitörölve összefüggő marad.

Ha még ez se körmentes, törlünk még egy élt, egészen addig, míg körmentes.

db élt töröltünk ki. n-csúcsú fát kaptunk éllel

De csak 0 lehet. Q. E. D.