**A tárgy címe:** ANALÍZIS 1 A-B-C (2+2).

## $\boxed{\textbf{1. gyakorlat}}$

**1.** (*Bernoulli-egyenlőtlenség.*) Legyen $1 \le n \in \mathbf{N}, -1 \le x_k \in \mathbf{R}$ $(k = 1, ..., n)$ és tegyük fel, hogy vagy $x_k \ge 0$ $(k = 1, ..., n)$ vagy pedig $x_k \le 0$ $(k = 1, ..., n)$. Ekkor

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \ge 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

**2.** (*Speciális Bernoulli-egyenlőtlenség.*) Ha $1 \le n \in \mathbf{N}$ és $-1 \le h \in \mathbf{R}$, akkor $(1 + h)^n \ge 1 + nh$. Mikor van itt egyenlőség? Lényeges-e a $h \ge -1$ feltétel?

**3.** (*Számtani-mértani közép.*) Bármely $1 \le n \in \mathbf{N}$ és $x_1, ..., x_n \in \mathbf{R}$, $x_k \ge 0$ $(k = 1, ..., n)$ választással

$$\prod_{k=1}^{n} x_k \le \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n$$

és itt akkor és csak akkor van egyenlőség, ha $x_1 = \cdots = x_n$.

**4.** Lássuk be, hogy tetszőleges $1 \le n, k \in \mathbf{N}$ természetes számokra:

$$\text{i)}\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} ;\ \text{ii)}\ 2 \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4.$$

**5.** Korlátos-e alulról, ill. felülről az $A$ halmaz, ha

i) $A := \left\{\frac{1}{x} \in \mathbf{R} : 0 < x < 1\right\}$; ii) $A := \left\{\frac{n+1}{2n+3} \in \mathbf{R} : n \in \mathbf{N}\right\}$;

iii) $A := \left\{\frac{x+1}{x^2+1} \in \mathbf{R} : x \in \mathbf{R}\right\}$; iv) $A := \left\{\frac{n^2+n+2}{3n+1} \in \mathbf{R} : n \in \mathbf{N}\right\}$;

v) $A := \left\{\sqrt{2x} - \sqrt{x} \in \mathbf{R} : 0 < x \in \mathbf{R}\right\}$; vi) $A := \left\{\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \in \mathbf{R} : 0 < x \in \mathbf{R}\right\}$?

## $\boxed{\textbf{2. gyakorlat}}$

**1.** Határozzuk meg az 1. heti gyakorlat 5. feladatában szereplő halmazok szuprémumát és infimumát.

**2.** Az $A := \left\{\frac{x}{y} \in \mathbf{R} : 0 < x < 1, 0 < y < x\right\}$ halmazt illetően ld. az 1. feladatot.

**3.** Mutassuk meg, hogy az $A := \{y \in \mathbf{R} : y^2 \le 2\}$ halmaz nem üres, felülről korlátos és az $x := \sup A$ jelöléssel $x^2 = 2$. Vezessük be a $\sqrt{2}$-t. Lássuk be, hogy $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$. Ennek alapján indokoljuk meg, hogy $\mathbf{Q}$-ban nem teljesül a *Dedekind*-axióma.

**4.** Mit mondhatunk $\sup(A \cup B)$-ről, $\sup(A \cap B)$-ről, $\sup(a + A)$-ról, $\sup(aA)$-ról, ha $A, B \subset \mathbf{R}$ és $a \in \mathbf{R}$? Mi a kapcsolat $\sup A$ és $\sup B$ között, ha $A \subset B$? Nézzük meg ugyanezeket sup helyett inf-re is.

## $\boxed{\textbf{3. gyakorlat}}$

**1.** Számítsuk ki $\sup A$-t, $\inf A$-t; van-e az $A$ halmaznak maximuma, ill. minimuma, ha

$$\text{i) } A := \left\{ \frac{7n-2}{2n+5} \in \mathbf{R} : n \in \mathbf{N} \right\}; \quad \text{ii) } A := \left\{ \frac{2m-1}{3n+2} \in \mathbf{R} : m, n \in \mathbf{N}, m \le n \right\};$$

$$\text{iii) } A := \left\{ \frac{2|x|+1}{5|x|+3} \in \mathbf{R} : x \in \mathbf{R} \right\}; \quad \text{iv) } A := \left\{ \frac{x^2+1}{3x^2+2} \in \mathbf{R} : x \in \mathbf{R} \right\}.$$

**2.** Határozzuk meg az $f \circ g$ összetett függvényt, ha

i) $f(x) := 2x+1, \;\; g(x) := x^2 - 3x + 2 \;\; (x \in \mathbf{R})$;

$$\text{ii) } f(x) := \begin{cases} 0 & (-\infty < x \le 0) \\ x & (0 < x < +\infty) \end{cases}, \quad g(x) := \begin{cases} 0 & (-\infty < x \le 0) \\ -x^2 & (0 < x < +\infty) \end{cases};$$

iii) $f(x) := \frac{1}{2x+1} \;\; (\mathbf{R} \ni x \ne -1/2), \;\; g(x) := x^2 + 3x - 10 \;\; (x \in \mathbf{R})$.

**3.** Invertálhatóak-e az alábbi függvények? Ha igen, akkor minden $x \in \mathcal{R}_f$ mellett számítsuk ki $f^{-1}(x)$-et:

$$\text{i) } f(x) := 2x+3 \quad (x \in \mathbf{R}); \quad \text{ii) } f(x) := \frac{x+1}{x-2} \quad (2 \ne x \in \mathbf{R});$$

$$\text{iii) } f(x) := \begin{cases} x+1 & (0 \le x \le 1) \\ 5-x & (1 < x \le 2) \end{cases}.$$

## $\boxed{\textbf{4. gyakorlat}}$

**1.** Milyen $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén lesz az

$$\text{i) } f(x) := \begin{cases} \alpha x + 1 & (0 \le x \le 1) \\ \alpha - x & (1 < x \le 2) \end{cases}; \quad \text{ii) } f(x) := \begin{cases} \alpha x + 1 & (-1 \le x < 0) \\ \alpha x^2 & (0 \le x \le 1) \end{cases}$$

függvény invertálható? Mi lesz ekkor $\mathcal{D}_{f^{-1}}$, $\mathcal{R}_{f^{-1}}$, ill. $f^{-1}(x) \quad (x \in \mathcal{D}_{f^{-1}})$?

**2.** Az $f(x) := 3 + 2x - x^2 \quad (x \in \mathbf{R})$ függvény és a $C := \{0\}$ halmaz esetén határozzuk meg $f[C]$-t és $f^{-1}[C]$-t. Milyen $A \subset \mathbf{R}$ halmazra lesz $f[A]$ vagy $f^{-1}[A]$ számossága i) egy; ii) nulla?

**3.** Legyen $f(x) := 3x + 1 \quad (x \in \mathbf{R})$, $a, b \in \mathbf{R}$ és $a \le b$, $I := [a, b]$. Határozzuk meg az $f[I]$, $f^{-1}[I]$ halmazokat.

**4.** Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat monotonitás és korlátosság szempontjából:

$$\text{i)}\ \ x_n := \frac{1}{n}\quad (0 < n \in \mathbf{N})\ \ ;\ \ \text{ii)}\ \ x_n := \frac{(-1)^n}{n+1}\quad (n \in \mathbf{N})\ \ ;\ \ \text{iii)}\ \ x_n := \sqrt{n}\quad (n \in \mathbf{N});$$

$$\text{iv)}\ \ x_n := \frac{8n+3}{5n+4}\quad (n \in \mathbf{N})\ \ ;\ \ \text{v)}\ \ x_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\quad (1 \le n \in \mathbf{N});$$

$$\text{vi)}\ \ x_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\quad (1 \le n \in \mathbf{N})\ \ ;\ \ \text{vii)}\ \ x_n := \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\quad (1 \le n \in \mathbf{N}).$$

**5.** Mit mondhatunk monotonitás, ill. korlátosság szempontjából egy számtani (mértani) sorozatról?

## **5. gyakorlat**

**1.** A definíció alapján lássuk be, hogy:

$$\text{i)}\ \ \lim\left(\frac{1}{n^2-3}\right) = 0\ \ ;\ \ \text{ii)}\ \ \lim\left(\frac{n}{2n-3}\right) = \frac{1}{2};$$

$$\text{iii)}\ \ \lim\left(\frac{1+n^2}{2+n-2n^2}\right) = -\frac{1}{2}\ \ ;\ \ \text{iv)}\ \ \lim\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = 0.$$

**2.** A konvergencia definíciója alapján számítsuk ki az alábbi határértékeket:

$$\text{i)}\ \ \lim\left(\frac{1+n^2}{2+n+n^2}\right)\ \ ;\ \ \text{ii)}\ \ \lim\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}\right)\ \ ;\ \ \text{iii)}\ \ \lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

**3.** A paraméterek milyen értékei mellett konvergens és ekkor mi a határértéke az $(\alpha+nd)$ $(\alpha, d \in \mathbf{R})$ számtani, ill. a $(\beta q^n)$ $(\beta, q \in \mathbf{R})$ mértani sorozatnak?

**4.** Igazoljuk, hogy:

$$\text{i)}\ \ \alpha := \lim(x_n) \implies |\alpha| = \lim(|x_n|);$$

$$\text{ii)}\ \ x_n \ge 0\ \ (n \in \mathbf{N}), \alpha := \lim(x_n) \implies \alpha \ge 0\ \text{ és }\ \sqrt{\alpha} = \lim(\sqrt{x_n}).$$

**5.** Általánosítsuk a 4./ii feladatot a következőképpen:

$$x_n \ge 0\ \ (n \in \mathbf{N}), \alpha := \lim(x_n),\ 2 \le k \in \mathbf{N}, \implies \sqrt[k]{\alpha} = \lim(\sqrt[k]{x_n}).$$

## **6. gyakorlat**

**1.** Legyen $q \in \mathbf{K}, |q| < 1, k \in \mathbf{N}$. Lássuk be, hogy $\lim\left(n^k q^n\right) = 0$.

**2.** Legyen $x \in \mathbf{R}$ és lássuk be, hogy

$$\text{i)}\ \ \lim\left(\frac{x^n}{n!}\right) = 0\ \ ;\ \ \text{ii)}\ \ \lim\left(\frac{n!}{n^n}\right) = 0.$$

**3.** A korábbi feladatok alapján indokoljuk meg, hogy az $e := \lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ határérték létezik. Ennek alapján számítsuk ki a

$$\text{i) } \lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right) \;\; ; \;\; \text{ii) } \lim\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)$$

határértékeket.

**4.** Tegyük fel, hogy adottak az $r, s \in \mathbf{N}$, $a_0, ..., a_r \in \mathbf{R}$, $b_0, ..., b_s \in \mathbf{R}$, $b_s \neq 0$ számok és tekintsük a $P(x) := \sum_{k=0}^{r} a_k x^k$, $Q(x) := \sum_{k=0}^{s} b_k x^k \quad (x \in \mathbf{R})$ polinomokat. Bizonyítsuk be, hogy

$$\text{i) } r < s \text{ esetén } \lim\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right) = 0 \;\; ; \;\; \text{ii) } r = s \text{ esetén } \lim\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right) = \frac{a_r}{b_s}.$$

**5.** Bizonyítsuk be, hogy

$$\text{i) bármely } 0 < \alpha \in \mathbf{R} \text{ esetén: } \lim\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) = 1 \;\; ; \;\; \text{ii) } \lim\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1.$$

## 7. gyakorlat

**1.** Mutassuk meg, hogy $\lim\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right) = 1$.

**2.** Általánosítsuk a 6. gyakorlat 5.i) feladatát a következőképpen: ha az $(x_n) : \mathbf{N} \to [0, +\infty)$ sorozat konvergens és $\lim(x_n) > 0$, akkor $\lim\left(\sqrt[n]{x_n}\right) = 1$. Mit mondhatunk akkor, ha

i) $\lim(x_n) = 0$;

ii) az $(x_n)$ sorozat nem konvergens?

**3.** Konvergensek-e az alábbi sorozatok, ha igen, akkor mi a határértékük:

$$\text{i) } \left(\sqrt[n]{3^n + 5^n}\right) \;\; ; \;\; \text{ii) } \left(\sqrt[n]{3n^5}\right)?$$

**4.** Legyen $x_n := \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2 \ldots}}}$ , $y_n := \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 \ldots}}}$ , $(1 \leq n \in \mathbf{N})$, ahol $x_n, y_n$ előbbi definíciójában $n$ darab gyökvonás szerepel. Adjunk meg rekurzív összefüggést az $(x_n)$, ill. az $(y_n)$ sorozat tagjai között, és ennek alapján számítsuk ki $\lim(x_n)$-et és $\lim(y_n)$-et.

**5.** Általánosítsuk az előbbi feladatot úgy, hogy az ott szereplő minden 2-es helyébe ugyanazt az $a \in \mathbf{R}$ számot próbáljuk írni. Milyen $a$-k esetén kapunk konvergens sorozatokat?

**6.** Konvergensek-e az alábbi sorozatok? Amelyik igen, annak mi a határértéke:

$$\text{i) } 0 \leq x_0 \leq 1, x_{n+1} := 1 - \sqrt{1 - x_n} \;\; (n \in \mathbf{N}) \;\; ; \;\; \text{ii) } a \geq 0, x_0 = 0, x_{n+1} := x_n^2 + a \;\; (n \in \mathbf{N})?$$

## 8. gyakorlat

**1.** Legyen $a \in \mathbf{R}, x_0 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ és $x_n := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad (n \in \mathbf{N})$. Konvergens-e az $(x_n)$ sorozat? Ha igen, akkor számítsuk ki $\lim(x_n)$-et.

**2.** A tágabb értelemben vett határérték definíciója alapján mutassuk meg, hogy

$$\text{i) } \lim\left(\frac{n^2 + 2 + 1}{n + 2}\right) = +\infty \;\; ; \;\; \text{ii) } \lim\left((-1)^n - n\right) = -\infty.$$

**3.** Legyen $P$ polinom és határozzuk meg $\lim(P(n))$-et.

**4.** Tegyük fel, hogy adottak az $r, s \in \mathbf{N}$, $r > s$, $a_0, ..., a_r \in \mathbf{R}$, $b_0, ..., b_s \in \mathbf{R}$, $b_s \neq 0$ számok és tekintsük a $P(x) := \sum_{k=0}^{r} a_k x^k$, $Q(x) := \sum_{k=0}^{s} b_k x^k \quad (x \in \mathbf{R})$ polinomokat. Mit mondhatunk a $\lim\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)$ határértékről?

**5.** Bizonyítsuk be, hogy ha $(x_n)$ pozitív tagú nullasorozat, akkor $\lim\left(\frac{1}{x_n}\right) = +\infty$.

**6.** Tegyük fel, hogy $\alpha := \lim(x_n), \beta := \lim(y_n) \in \overline{\mathbf{R}}$, $*$ jelenti az összeadást (szorzást) (osztást) és létezik az $(x_n * y_n)$ sorozat. Illusztráljuk példákkal azt, hogy mindebből általában nem következik a $\lim(x_n * y_n)$ határérték létezése. (Pl. $\alpha = 0$, $\beta = +\infty$, de az $(x_n y_n)$ szorzatsorozatnak nincs határértéke, stb.)

## 9. gyakorlat

**1.** Konvergens-e a i) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$ ; ii) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)$ sorozat?

**2.** Igazoljuk, hogy az alábbi végtelen sorok konvergensek, és határozzuk meg az összegüket:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \;;\; \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) \;;\; \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \;;$$

$$\text{iv)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \;;\; \text{v)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 4}{5^n}.$$

**3.** Az alábbi sorok közül melyik konvergens:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0.1} \;;\; \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \;;\; \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \;;$$

$$\text{iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} \;;\; \text{v)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!} \;;\; \text{vi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}?$$

## 10. gyakorlat

**1.** Legyen $q \in \mathbf{R}, |q| < 1$ és határozzuk meg az alábbi sorösszegeket: i) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ ; ii) $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$.

**2.** (*Cauchy-féle kondenzációs elv.*) A $0 \leq a_{n+1} \leq a_n \quad (n \in \mathbf{N})$ feltétel mellett a $\sum(a_n)$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha a $\sum(2^n a_{2^n})$ is az. (Tehát a két sor *ekvikonvergens.*)

**3.** Milyen $p \in \mathbf{R}$ esetén konvergens a $\sum(n^p)$ sor?

**4.** Az alábbi sorok közül melyik konvergens:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \;;\; \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}} \;;\; \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \;;\; \text{iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} \;;\; \text{v)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n};$$

$$\text{vi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n} \;;\; \text{vii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \;;\; \text{viii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \;;\; \text{ix)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}?$$

## 11. gyakorlat

**1.** Milyen $x \in \mathbf{R}$ esetén konvergensek:

$$\text{i)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}\ ;\ \text{ii)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n}}\ ;\ \text{iii)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2n-1} x^n;$$

$$\text{iv)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n\ ;\ \text{v)}\ 0<\alpha \in \mathbf{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n\ ;\ \text{vi)}\ 0<\alpha<1,\ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} \cdot x^n;$$

$$\text{vii)}\ 0<a \in \mathbf{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n\ ;\ \text{viii)}\ 0<p \in \mathbf{R},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^p}?$$

**2.** Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergencia-sugarát és konvergencia-tartományát:

$$\text{i)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n\ ;\ \text{ii)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n+1} x^n\ ;\ \text{iii)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}} x^n\ ;$$

$$\text{iv)}\ a>1,\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{a^{\sqrt{n}}}.$$

**3.** Adjunk meg olyan hatványsort, amelynek a konvergencia-tartománya az $I$ intervallum, ahol $I \in \{(-1,1), (-1,1], [-1,1), [-1,1]\}$, ill. adott $a, b \in \mathbf{R}, a<b$ esetén $I \in \{(a,b), (a,b], [a,b), [a,b]\}$.

## 12. gyakorlat

**1.** Mutassuk meg, hogy bármely $x \in \mathbf{R}, |x|<1$ esetén

$$\text{i)}\ \frac{\sin x}{1-x} = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^4 + \frac{101}{120}x^5 + \cdots\ ;\ \text{ii)}\ \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (z \in \mathbf{R}, |x|<1).$$

(A ii) feladatot vessük egybe a 10. gyakorlat 1.ii) feladatával.)

**2.** Az alábbi $f$ függvényeket (vagy egy alkalmas leszűkítésüket) állítsuk elő 0-körüli hatványsor összegeként:

$$\text{i)}\ f(x) := \frac{1+x}{1-x^2} \quad (x \in \mathbf{R} \setminus \{-1,1\})\ ;\ \text{ii)}\ f(x) := \frac{1+x}{1-x^3} \quad (x \in \mathbf{R} \setminus \{1\});$$

$$\text{iii)}\ f(x) := \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} \quad (x \in \mathbf{R} \setminus \{-1,1\})\ ;\ \text{iv)}\ f := \cos^2;$$

$$\text{v)}\ f(x) := \frac{x}{1+x-2x^2} \quad \left(x \in \mathbf{R} \setminus \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}\right).$$

**3.** Milyen $x, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in \mathbf{R}$ esetén igazak az alábbi egyenlőségek:

$$\text{i)}\ \frac{1}{2-x} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \\ \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (x-1)^k \\ \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \left(\frac{1}{x}\right)^k \end{cases}\ ;\ \text{ii)}\ \frac{x}{x^2-5x+6} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \\ \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (x-5)^k \end{cases}\ ?$$

$\boxed{\textbf{13. gyakorlat}}$ (vizsgaanyag)

**1.** Bizonyítsuk be, hogy

$$\text{i)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \;\; ; \;\; \text{ii)} \;\; e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{\theta_n}{n \cdot n!} \quad (0 < n \in \mathbf{N}, 0 < \theta_n < 1) \;\; ; \;\; \text{iii} \;\; e \notin \mathbf{Q}.$$

**2.** Igazoljuk az alábbi azonosságokat: bármely $x, y \in \mathbf{R}$ esetén

$$\text{i)} \; \sin 2x = 2 \sin x \cos x \;\; ; \;\; \text{ii)} \; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$$

$$\text{iii)} \; \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \;\; ; \;\; \text{iv)} \; \exp(x+y) = \exp x \exp y \;\; ;$$

$$\text{v)} \; \exp(-x) = \frac{1}{\exp x} \;\; ; \;\; \text{vi)} \; \exp(x-y) = \frac{\exp x}{\exp y}.$$