

Tematikai összefoglalás: a valós számok halmaza, korlátos halmazok, szuprémum, infimum. Számsorozatok, monoton sorozatok. Konvergencia, *Cauchy*-kritérium. Műveletek és konvergencia. Monoton sorozatok konvergenciája. Gyökvonás. Kibővített számegyenes, tágabb értelemben vett határérték. Végtelen (numerikus) sorok, konvergencia, abszolút konvergencia. Konvergencia-kritériumok. *Leibniz*-sorok. Zárójelzés, átrendezés, sorok szorzása, *Mertens*-tétel. Valós számok p -adikus törtelőállítás. Hatványsorok, *Cauchy-Hadamard*-tétel. Hatványsor összegfüggvénye, elemi függvények. Függvények határértéke. Átviteli elv, határérték és műveletek. Analitikus függvények, ill. monoton függvények határértéke. Folytonosság, szakadás. A folytonosság kapcsolata a határértékkel. A folytonosságra vonatkozó átviteli elv, műveletek folytonos függvényekkel. Az összetett függvény folytonossága. *Bolzano*-tétel, *Darboux*-tulajdonság. Analitikus függvények folytonossága. Kompakt intervallumon folytonos függvények szélsőértéke, *Weierstrass*-tétel. Egyenletes folytonosság, *Heine*-tétel. Az inverz függvény folytonossága.

Az egyes előadások tematikája:

1. előadás

A valós számok axiómáinak a felelevenítése. *Dedekind*-axióma. Korlátos halmazok, szuprémum, infimum. *Archimedes*-tétel. *Cantor*-féle közösrész tétel. A természetes számok halmaza felülről nem korlátos. A valós számok kibővített halmaza. A függvény fogalmának (és a kapcsolódó alapfogalmaknak: értelmezési tartomány, értékkészlet, helyettesítési érték, invertálhatóság, kompozíció) felidézése. Halmaz függvény által létesített képe, ősképe.

2. előadás

A sorozat fogalma, műveletek számsorozatokkal. Indexsorozat, részsorozat. Monoton számsorozatok. Minden valós sorozatnak van monoton részsorozata. Korlátos sorozatok. A konvergencia definíciója. A definíció átfogalmazása környezetekkel. Minden konvergens sorozat korlátos. Példák.

3. előadás

A limesz egyértelmű. A $((-1)^n)$ sorozat divergens. Véges sok tag megváltoztatása nem befolyásolja sem a konvergenciát, sem a határértéket. Sorozat elcsúsztatottja (a határérték nem változik). Nullasorozatok, majoráns-kritérium. Műveletek nullasorozatokkal. A határérték és a műveletek kapcsolata.

4. előadás

A határérték és a rendezés közötti kapcsolat. A közrefogási elv. Monoton sorozatok határértéke. Részsorozatok határértéke, *Bolzano-Weierstrass*-féle kiválasztási tétel. A gyökvonás értelmezése sorozatok segítségével.

5. előadás

Cauchy-kritérium, a konvergencia szükséges és elégséges feltétele. Számsorozatok tágabb értelemben vett határértéke. Monoton és nem korlátos sorozat határértéke. A műveletek kiterjesztése a kibővített számegyenesre, ezek kapcsolata a kibővített értelemben vett határértékkel.

6. előadás

A végtelen (numerikus)sor fogalma, konvergenciája. A *Cauchy*-kritérium sorokra vonatkozó alakja. A konvergencia szükséges feltétele (a generáló sorozat nullasorozat). Ekvikonvergens sorok. A mértani sor konvergencia-vizsgálata. Abszolút konvergencia, összehasonlító kritérium. A harmonikus sor divergens, a szuperharmonikus sor konvergens.

7. előadás

A *Cauchy*-féle gyök- és a *D'Alembert*-féle hányados kritérium speciális esete. *Leibniz*-féle sorok és konvergenciájuk.

8. előadás

A valós számok p -adikus tört alakban való előállítás. Műveletek sorokkal (összeadás, konstanssal való szorzás). Sorok zárójelezése.

9. előadás

Sorok átrendezése, feltételesen konvergens sorok (bizonyítás nélkül). Sorok szorzása: téglány szorzat, *Cauchy*-szorzat, *Mertens*-tétel. Hatványsorok, a *Cauchy-Hadamard*-tétel speciális esete. Hatványsorok összefüggvénye (analitikus függvények).

10. előadás

A torlódási pont fogalma (véges, ill. nem véges esetek). Átfogalmazás környezetek segítségével. A függvény határértékének a definíciója (környezetekkel). A határérték egyértelműsége. Speciális esetek: végesben vett véges (ε - δ -s átfogalmazás), végesben vett végtelen, stb. Példák. Egyoldali határérték, kapcsolata a határértékkel.

11. előadás

A határértékre vonatkozó átviteli elv. A határérték és az alpműveletek közötti kapcsolat. Monoton függvények határértéke. Hatványsor középpontjának az eltolása (bizonyítás nélkül), az összegfüggvény határértéke. Polinomok, racionális törtfüggvények határértéke. Folytonos függvények. A folytonosság és a határérték kapcsolata. Hatványsor összegfüggvénye folytonos.

12. előadás

A folytonosságra vonatkozó átviteli elv. Alpműveletek folytonos függvényekkel. Az összetett függvény folytonossága. A *Bolzano*-tétel, *Darboux*-tulajdonság. Egyenletes folytonosság, *Heine*-tétel.

13. előadás

Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények maximuma, minimuma, *Weierstrass*-tétel. Intervallum folytonos képe intervallum. Az inverz függvény folytonossága.