A tárgy címe : ANALÍZIS 1 A-B-C (2+2).

$\boxed{\textbf{1. gyakorlat}}$

(2012. 02.13 - 2012.02.17)

1. (*Bernoulli-egyenlőtlenség.*) Ha $1 \le n \in \mathbf{N}$ és $-1 \le h \in \mathbf{R}$, akkor $(1+h)^n \ge 1+nh$. Mikor van itt egyenlőség ? Lényeges-e a $h \ge -1$ feltétel ?

2. (*Számtani-mértani közép.*) Bármely $1 \le n \in \mathbf{N}$ és $x_1, ..., x_n \in \mathbf{R}$, $x_k \ge 0 \;\; (k = 1, ..., n)$ választással

$$\prod_{k=1}^{n} x_k \le \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \right)^n$$

és itt akkor és csak akkor van egyenlőség, ha $x_1 = \cdots = x_n$.

3. Lássuk be, hogy tetszőleges $1 \le n \in \mathbf{N}$ természetes számokra :

$$\text{i)} \;\; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \;\; ; \text{ ii)} \;\; 2 \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4.$$

4. Mutassa meg, hogy minden pozitív a, b, c valós számokra fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek :

$$8abc \le (a+b) \cdot (b+c) \cdot (a+c) \le \frac{8}{27} \cdot (a+b+c)^3.$$

5. Bizonyítsa be, hogy minden $a \ge -\dfrac{1}{2}$ valós számra fennáll az alábbi egyenlőtlenség :

$$(1-a)^5 (1+a)(1+2a)^2 \le 1.$$

Házi feladatok : "Szili László : Analízis feladatokban I." : 28, 32/b, 33, 30/c.

$\boxed{\textbf{2. gyakorlat}}$

(2012.02.20 - 2012.02.24)

1. Korlátosak-e alulról, ill. felülről az alábbi A halmazok ? Számítsuk ki $supA$-t, $infA$-t. Van-e a halmaznak minimuma, illetve maximuma, ha :

i) $A := \left\{ \frac{1}{x} \in \mathbf{R} : 0 < x < 1 \right\}$; ii) $A := \left\{ \dfrac{n+1}{2n+3} \in \mathbf{R} : n \in \mathbf{N} \right\}$;

iii) $A := \left\{ \dfrac{2x^2+1}{5x^2+2} \in \mathbf{R} : x \in \mathbf{R} \right\}$; iv) $A := \left\{ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \in \mathbf{R} : 0 \le x \in \mathbf{R} \right\}$?

v) $A := \left\{ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \in \mathbf{R} : 0 < x \in \mathbf{R} \right\}$?

Útmutatás a v) ponthoz : a $supA = 1$ igazolásához használjuk például a $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} > 1 - \sqrt{x} > 1 - \varepsilon$ becslést.

2. Az $A := \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbf{R} : 0 < x < 1, 0 < y < x \right\}$ halmazt illetően válaszoljuk meg az 1. feladat kérdéseit.

Házi feldatok :

1. Számítsuk ki $\sup A$-t, $\inf A$-t ; van-e az A halmaznak maximuma, ill. minimuma, ha :

i) $A := \left\{ \dfrac{7n-2}{2n+5} \in \mathbf{R} : n \in \mathbf{N} \right\}$; ii) $A := \left\{ \dfrac{2m-1}{3n+2} \in \mathbf{R} : m, n \in \mathbf{N}, m \le n \right\}$;

iii) $A := \left\{ \dfrac{2|x|+1}{5|x|+3} \in \mathbf{R} : x \in \mathbf{R} \right\}$; iv) $A := \left\{ \dfrac{2^{n+2}+9}{3 \cdot 2^n + 2} \in \mathbf{R} : n \in \mathbf{N} \right\}$.

Szili László : "Analízis Feladatokban I." : 110 ; 119/a, b, c, d.

$\boxed{\textbf{3. gyakorlat}}$

(2012.02.27 - 2012.03.02)

1. Határozzuk meg az $f \circ g$ összetett függvényt, ha :

i) $f(x) := \sqrt{x+1}$, $(x \in [-1; +\infty))$, $g(x) := x^2 - 3x + 1$ $(x \in \mathbf{R})$;

ii) $f(x) := \begin{cases} 0 & (-\infty < x \leq 0) \\ x & (0 < x < +\infty) \end{cases}$, $g(x) := \begin{cases} 0 & (-\infty < x \leq 0) \\ -x^2 & (0 < x < +\infty) \end{cases}$;

iii) $f(x) := \dfrac{1}{2x+1}$ $(\mathbf{R} \ni x \neq -1/2)$, $g(x) := x^2 + 3x + \dfrac{1}{2}$ $(x \in \mathbf{R})$.

2. Az $f(x) := 3 + 2x - x^2$ $(x \in \mathbf{R})$ függvény és a $C := \{0\}$ halmaz esetén határozzuk meg $f[C]$-t és $f^{-1}[C]$-t. Milyen $A \subset \mathbf{R}$ halmazra lesz $f[A]$ vagy $f^{-1}[A]$ számossága i) egy ; ii) nulla ?

3. Legyen $f(x) = \sqrt{|5x-2|+1}$, $(x \in \mathbf{R})$ és $D := (-1, 2]$. Határozzuk meg az $f^{-1}[D]$ halmazt.

4. Invertálhatóak-e az alábbi függvények ? Ha igen, akkor minden $x \in \mathcal{R}_f$ mellett számítsuk ki $f^{-1}(x)$-et :

$$\text{i)}\ \ f(x) := x^2 + 4x \quad (x \in [-1, +\infty)); \quad \text{ii)}\ \ f(x) := \frac{1}{1 + |x-1|} \quad (x \in \mathbf{R});$$

$$\text{iii)}\ \ f(x) := \begin{cases} 3x+1, & (0 \leq x \leq 1) \\ \sqrt{18-x}, & (1 < x < 2) \end{cases}; \quad \text{iv)}\ \ f(x) := \frac{x+1}{x-2} \quad (2 \neq x \in \mathbf{R}).$$

Házi feladatok : Szili László : "Analízis Feladatokban I." : 80, 81, 82, 86, 94/a, 95, 89/a, c ; 88, 90/a, c, d, e, 96.

$\boxed{\textbf{4. gyakorlat}}$

(2012. 03. 05 - 2012. 03. 09)

1. Milyen $\alpha \in \mathbf{R}$ esetén lesz az

$$\text{i)}\ \ f(x) := \begin{cases} \alpha x + 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ \alpha - x & (1 < x \leq 2) \end{cases}; \quad \text{ii)}\ \ f(x) := \begin{cases} \alpha x + 1 & (-1 \leq x < 0) \\ \alpha x^2 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

függvény invertálható ? Mi lesz ekkor $\mathcal{D}_{f^{-1}}$, $\mathcal{R}_{f^{-1}}$, ill. $f^{-1}(x)$ $(x \in \mathcal{D}_{f^{-1}})$?

2. Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat monotonitás, kvázi-monotonitás és korlátosság szempontjából :

$$\text{i)}\ \ x_n := \frac{8n+3}{5n+4} \quad (n \in \mathbf{N}); \quad \text{ii)}\ \ x_n := \frac{3n-7}{2^{2n+1}} \quad (n \in \mathbf{N}); \quad \text{iii)}\ \ x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (1 \leq n \in \mathbf{N});$$

$$\text{iv)}\ \ x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}) \ ; \ \text{v)}\ \ x_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \quad (1 \leq n \in \mathbf{N}).$$

Házi feladatok : "Szili László : Analízis Feladatokban I." : 92, 93/b, 138/c, d, e, f ; 139.

$\boxed{5.\ \textbf{gyakorlat}}$

(2012.03.12 - 2012.03.16)

1. A definíció alapján lássuk be, hogy :

$$\text{i)}\ \lim\left(\frac{1}{n^2-3}\right)=0\ ;\ \text{ii)}\ \lim\left(\frac{n}{2n-3}\right)=\frac{1}{2};\ \text{iii)}\ \lim\left(\frac{2n^3+10}{n^3+n^2+n+1}\right)=2.$$

2. A definíció alapján számítsuk ki az alábbi határértékeket. Melyik sorozat konvergens ?

$$\text{i)}\ \lim\left(\frac{1+n^2}{2+n-2n^2}\right)\ ;\ \text{ii)}\ \lim\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}\right);\ \text{iii)}\ \lim\left(\sqrt{\frac{2n^3-n^2+3n+1}{n^2+\sqrt{n}+2}}\right).$$

3. Igazoljuk, hogy :

i) $\alpha := \lim(x_n) \implies \lim(|x_n|)=|\alpha|$;

ii) $x_n\geq 0\ \ (n\in\mathbf{N}), \alpha:=\lim(x_n) \implies \alpha\geq 0$ illetve $\lim(\sqrt{x_n})=\sqrt{\alpha}$;

iii) ha (x_n) pozitív tagú nullasorozat $\implies \lim\left(\frac{1}{x_n}\right)=+\infty$.

Házi feladatok : "Szili László : Analízis Feladatokban I." : 150/a, b, c ; 151/a, c, d ; 154/ b, d, e, f.

$\boxed{6.\ \textbf{gyakorlat}}$

(2012.03.19 - 2012.03.23)

1. Számítsuk ki az alábbi határértékeket :

i) $\lim\left(\frac{n^3-3n^2+n-1}{1-2n^3+n}\right)$; ii) $\lim\left(\frac{n^4+n^2+n+1}{2n^5+n-4}\right)$; iii) $\lim\left(\frac{n^7+n-12}{1-n^2+3n}\right)$; iv) $\lim\left(\frac{(2-n)^7+(2+n)^7}{(n^2+n+1)\cdot(2n+1)^5}\right)$.

2. Számítsuk ki az alábbi határértékeket :

i) $\lim(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2-n+1}\ )$;

ii) Az $a\in\mathbb{R}$ tetszőleges paraméter esetén : $\lim(\sqrt{n^2+n+1}-a\cdot n\ )$;

3. A nevezetes $(q^n), (n^k\cdot q^n), \left(\frac{x^n}{n!}\right)$ sorozatok határértékéről tanultakat is felhasználva, számítsuk ki az alábbi limeszeket :

i) $\lim\left(\frac{5^{n+1}+2^n}{3\cdot 5^n-5^{-n}}\right)$; ii) $\lim\left(\frac{n^2\cdot 3^n+2^{2n}}{4^{n+1}+2^n}\right)$; iii) $\lim\left(\sqrt{\frac{(-5)^n+7^n}{7^{n+1}+n^7}}\right)$; iv) $\lim\left(\frac{(-2)^n+n}{n!+3^n}\right)$;

Házi feladatok : "Szili László : Analízis Feladatokban I." : 181, 184/a, b, c, f, 193/d, e, f, j., 196.