Analízis1ABC, 2. zárthelyi dolgozat , 2012.05.16.
Megoldások

1. Számítsa ki a következő határértékeket :

$$\text{a)} \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}; \qquad \text{b)} \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{n}{n^3+1}}+\sqrt{\frac{n}{n^3+2}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n^3+n}}\right).$$

Megoldás :

a) Mivel 1^∞ eset, ezért visszavezetjük a tanult nevezetes határértékre, mely szerint, ha $0 < x_n$, $(n \in \mathbb{R})$, és $\lim(x_n) = +\infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$. Mivel a hatvány alapja kisebb mint 1 ezért áttérünk a reciprokra :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{2n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{3n-1+3}{3n-1}\right)^{2n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)^{2n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left[\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)^{\frac{3n-1}{3}}\right]^2\cdot\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{e^2}.$$

Itt felhasználtuk, hogy : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)^{\frac{3n-1}{3}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$, ahol $x_n = \frac{3n-1}{3} \to +\infty$, (ha $n\to\infty$),

és $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)^{\frac{2}{3}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)^2} = \sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)^2} = 1.$

Tehát a keresett határérték : e^{-2}.

b) A feladatot közrefogással oldjuk meg. Becsüljük meg az összeg minden tagját alulról a legkissebb taggal, felülről pedig a legnagyobbal, azaz :

$$n\cdot\sqrt{\frac{n}{n^3+n}} \le \sqrt{\frac{n}{n^3+1}}+\sqrt{\frac{n}{n^3+2}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n^3+n}} \le n\cdot\sqrt{\frac{n}{n^3+1}}.$$

A közrefogó sorozatokra : $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sqrt{\frac{n}{n^3+n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^3}{n^3+n}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^3+n}\right)} = 1,$

illetve : $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sqrt{\frac{n}{n^3+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^3}{n^3+1}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^3+1}\right)} = 1$, tehát a közrefogott eredeti sorozat határértéke is : 1.

2. Adott az $x_0 := 1$ és $x_{n+1} := 1+\sqrt{x_n+1}$; $(n\in\mathbb{N})$ sorozat. Konvergens-e és ha igen, mi a határértéke ?

Megoldás :

i) Vizsgáljuk meg a sorozatot monotonitás szempontjából : $x_0 = 1 < x_1 = 1+\sqrt{1+1} = 1+\sqrt{2}$. Igazoljuk indukcióval, hogy a sorozat szigorúan monton nő. Az első lépés megvan, tegyük fel, hogy valamely n-re teljesül, hogy $x_n < x_{n+1}$ és, kell, hogy : $x_{n+1} < x_{n+2}$.

A rekurzív formula alapján, ez utóbbi $\Leftrightarrow 1+\sqrt{x_n+1} < 1+\sqrt{x_{n+1}+1} \Leftrightarrow \sqrt{x_n+1} < \sqrt{x_{n+1}+1} \Leftrightarrow x_n < x_{n+1}$ ami az indukciós feltevés volt. Tehát a sorozat szigorúan monoton nő , így $\forall n\in\mathbb{N}$ esetén : $x_0 = 1 \le x_n$, tehát a sorozat alulról korlátos. Van-e felső korlát ? Nézzük meg ehhez a lehetséges határértékeket !

ii) Tegyük fel, hogy a sorozat konvergens és $\lim(x_n) = A \in \mathbb{R}$. Ekkor $\lim(x_{n+1}) = A$ és a rekurzió alapján, kapjuk, hogy $\lim(x_{n+1}) = 1+\sqrt{\lim(x_n)+1} \Leftrightarrow A = 1+\sqrt{A+1} \Leftrightarrow (A-1)^2 = A+1 \Leftrightarrow A^2-3A = 0 \Leftrightarrow A(A-3) = 0$. Tehát a lehetséges határértékek : $A = 0$ vagy $A = 3$. Mivel sorozat monoton nő, és első tagja 1 így csak 3 lehet a határérték. Belátjuk, hogy ez felső korlátja is a sorozatnak !

iii) Indukcióval igazoljuk, hogy $x_n \le 3$, $(\forall n\in\mathbb{N})$. Ha $n = 0$, akkor $x_0 = 1 < 3$ teljesül. Tegyük fel, hogy valamely $n\in\mathbb{N}$-re : $x_n < 3$. Be kell látni, hogy : $x_{n+1} < 3$.

A rekurzió és az indukciós feltevés alapján : $x_{n+1} = 1+\sqrt{x_n+1} < 1+\sqrt{3+1} = 1+2 = 3.$

Tehát a sorozat korlátos, monoton $\Rightarrow$ konvergens és $\lim(x_n) = 3$.

3. Konvergens-e az alábbi sor, és ha igen adja meg a sor összegét :

$$\sum_{n=1}[(\sqrt{2})^{2n+1}+(-1)^n]\cdot 3^{1-n}.$$

Megoldás :

Végezzük el a következő alakításokat, és látható, hogy az adott sor két konvergens geometriai sor összegére bontható :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}[(\sqrt{2})^{2n+1}+(-1)^n]\cdot 3^{1-n}=\sum_{n=1}^{+\infty}[\sqrt{2}\cdot 2^n+(-1)^n]\cdot 3^{1-n}=3\sqrt{2}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n+3\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n$$

Mivel a fenti két sor hányadosai : $q=\frac{2}{3}$ és $q=-\frac{1}{3}$ a $(-1;1)$ intervallumba esnek, ezért mindkét sor abszolút konvergens, így konvergensek is és a keresett sor összege egyenlő az egyes sorok összegének az összegével. Mivel az összegzés $n=1$-től indul, ezért mindkét összegben kiemelhetjük a q hányadost, majd használjuk a konvergens geometriai sor összegére tanult formulát : $\sum_{n=0}^{+\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$, $\quad(q\in(-1;1))$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}[(\sqrt{2})^{2n+1}+(-1)^n]\cdot 3^{1-n}=3\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}-3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=6\cdot\sqrt{2}-\frac{3}{4}.$$

Tehát a sor konvergens és összege : $6\cdot\sqrt{2}-\frac{3}{4}$.

4. Döntse el, hogy az alábbi sorok konvergensek vagy divergensek (válaszát indokolja) :

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}\Big(\frac{2n+1}{3n+2}\Big)^{n^2+n};\qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}\frac{(-2)^n\cdot n^n}{n!+(n+1)!};\qquad \text{c)}\ \sum_{n=1}\frac{n^2+n-1}{\sqrt{n^5+1}+\sqrt[n]{n}}\,?$$

Megoldás :

a) Alkalmazzuk a gyökkritériumot :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\Big(\frac{2n+1}{3n+2}\Big)^{n^2+n}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{2n+1}{3n+2}\Big)^{n+1}=0<1,$$

ezért a gyökkritérium értelmében a sor abszolút konvergens, így **konvergens** is.

Itt felhasználtuk, hogy : $\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{2n+1}{3n+2}\Big)=\frac{2}{3}<1$ ezért $\exists n_0\in\mathbb{N}$, úgy, hogy $\forall n>n_0,\ \ n\in\mathbb{N}$ indexre :

$$0<\Big(\frac{2n+1}{3n+2}\Big)^{n+1}<\Big(\frac{5}{6}\Big)^{n+1}\ \text{és mivel}\ \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{n+1}=0\Rightarrow\text{ld. közrefogás}\ \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{2n+1}{3n+2}\Big)^{n+1}=0.$$

Megjegyezzük, hogy a fenti becslésben $\frac{5}{6}$ helyett bármely $\frac{2}{3}$ és 1 közti számot használhattunk volna.

b) Most írjuk fel a hányados kritériumot :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|(-2)^{n+1}\cdot(n+1)^{n+1}|}{|(n+1)!+(n+2)!|}\cdot\frac{|n!+(n+1)!|}{|(-2)^n\cdot n^n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n}\cdot\frac{(n+1)\cdot(n+1)^n}{n^n}\cdot\frac{n!+(n+1)!}{(n+1)!+(n+2)!}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}2\cdot\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\cdot\frac{(n+1)\cdot n!\cdot(n+2)}{(n+1)!\cdot(n+3)}=\lim_{n\to+\infty}2\cdot\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\cdot\frac{n+2}{n+3}=2\cdot e\cdot 1=2e>1,$$

tehát ez a sor **divergens**.

c) Vizsgáljuk meg a tagok nagyságrendjét : mivel $\lim(\sqrt[n]{n})=1$ ezért nagy n indexekre $\sqrt[n]{n}$ "közel" van 1-hez, így a nevező nagyságrendje : $\sqrt{n^5}$ a számlálóé n^2, ezért a fenti sor ekvikonvergens a $\sum_{n\geq1}\frac{n^2}{\sqrt{n^5}}=\sum_{n\geq1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ sorral. Ez utóbbi a tanult $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^p}$ hiperharmonikus sor, ahol $p=\frac{1}{2}>1$, ezért a tanult tétel értelmében a sor divergens. Alkalmazzuk az összehasonlító kritériumot, felhasználva, hogy $\sqrt[n]{n}<\sqrt{n^5}$ minden $n\geq1$ természetes számra. Tehát, ha $n\geq1$:

$$\frac{n^2+n-1}{\sqrt{n^5+1}+\sqrt[n]{n}}>\frac{n^2}{\sqrt{n^5+n^5}+\sqrt{n^5}}>\frac{n^2}{(\sqrt{2}+1)\sqrt{n^5}}>\frac{1}{3\sqrt{n}}>0$$

Az említett $\sum_{n\geq1}\frac{1}{3\sqrt{n}}$ sor divergens, így az eredeti sor is **divergens**.

5. Adjon meg olyan $R > 0$ valós számot és (a_n) sorozatot, amelyekkel :

$$\frac{2x+4}{(x-3)(3x+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n, \quad (x \in (-R, +R)).$$

Megoldás :

Bontsuk fel a törtet parciálisan :

$$\frac{2x+4}{(x-3)(3x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{3x+1} \text{ , ahol } A, B \in \mathbb{R} \text{ alkalmas konstansok.}$$

Ez pontosan akkor teljesül minden $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{3, -\frac{1}{3}\right\}$ számra, ha :

$2x+4 = A(3x+1) + B(x-3) \Leftrightarrow 2x+4 = (3A+B)x + A - 3B \Leftrightarrow 3A+B = 2, A-3B = 4 \Leftrightarrow A = 1, B = -1.$

Tehát a keresett felbontás :

$$\frac{2x+4}{(x-3)(3x+1)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{3x+1}.$$

A kapott két törtet tagonként hatványsorba fejtve (ld. geometriai sor összegzése) :

$$\frac{1}{1+3x} = \frac{1}{1-(-3x)} = \left(\text{ha } |-3x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{3}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-3x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-3)^n \cdot x^n, \quad \text{ha } x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \text{ illetve}$$

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3 \cdot \left(1 - \frac{x}{3}\right)} = (\text{ha } \left|\frac{x}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 3) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{3^{n+1}} \cdot x^n, \quad \text{ha } x \in (-3, 3).$$

Ezeket beírva, a közös konvergencia halmazon, azaz, ha $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ kapjuk, hogy :

$$\frac{2x+4}{(x-3)(3x+1)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{3x+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-(-3)^n - \frac{1}{3^{n+1}}\right) \cdot x^n.$$

Tehát a keresett konvergencia sugár $R = \frac{1}{3}$ és $a_n = -(-3)^n - \frac{1}{3^{n+1}}, \quad (n \in \mathbb{N}).$