Oktatási segédanyag
a Programtervező matematikus szak
Analízis 2. című tantárgyához
(2003–2004. tanév tavaszi félév)

Analízisfeladat-gyűjtemény III.

Összeállította
Lóczi Lajos és Szili László

2004

Tartalomjegyzék

I. rész

Feladatok

1. Számsorok

1.1. Nevezetes számsorok

F1. Legyen $q \in \mathbb{R}$. A $\sum\limits_{n=0} q^n$ **mértani sor** pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor az összege

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots = \frac{1}{1-q} \qquad (|q| < 1).$$

F2. A $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ sor konvergens és $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$.

F3. A $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n}$ **harmonikus sor** divergens; a $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ sor divergens; a $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n^2}$ sor konvergens.

F4. Legyen α rögzített valós szám. A

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^\alpha} \quad \textbf{hiperharmonikus sor} \quad \begin{cases} \text{konvergens,} & \text{ha } \alpha > 1 \\ \text{divergens,} & \text{ha } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

F5. A $\sum\limits_{n=0} \dfrac{1}{n!}$ sor konvergens és $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \cdots = e$.

F6. A $\sum\limits_{n=1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots$ sor konvergens (Leibniz típusú sor).

1.2. Komplex tagú sorozatok konvergenciája

F7. Konvergensek-e az alábbi sorozatok? Ha igen, akkor számítsa ki a határértéküket:

(a) $z_n := \dfrac{n-i}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$,

(b) $z_n := \dfrac{1+2ni}{n+i}$ $(n \in \mathbb{N})$,

(c) $z_n := (1-i)^n$ $(n \in \mathbb{N})$,

(d) $z_n := 1 + \dfrac{i^n}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$,

(e) $z_n := i^n\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)$ $(n \in \mathbb{N})$,

(f) $z_n := \Big(\dfrac{2+i}{3}\Big)^n$ $(n \in \mathbb{N})$,

(g) $z_n := \dfrac{(1+i)^{2n}}{3^n}$ $(n \in \mathbb{N})$,

(h) $z_n := (2+i)^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

1.3. Számsorok összegének meghatározása

F8. Igazolja, hogy az alábbi sorok konvergensek és határozza meg az összegüket:

(a) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}}$, (b) $\sum\limits_{n=1} \left(\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n}\right)$,

(c) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{2n-1}{2^n}$, (d) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n(n+1)}$,

(e) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, (f) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$,

(g) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, (h) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{(-1)^n + 4}{5^n}$.

F9. Mutassa meg, hogy a $\sum q^n$ geometriai sor $q \in \mathbb{C}$ esetén akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor az összege $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

F10. Milyen $q \in \mathbb{C}$ esetén konvergens a $\sum\limits_{n=1} nq^n$ sor? Ha konvergens, akkor mi az összege?

F11. Vizsgálja meg a következő sorokat konvergencia szempontjából, és ha konvergensek, akkor számítsa ki az összegüket:

(a) $\sum\limits_{n=0} \left(\dfrac{i}{2}\right)^n$, (b) $\sum\limits_{n=0} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\right)^n$.

F12. Mutassa meg, hogy a $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$ sor konvergens, és számítsa ki az összegét.

1.4. Számsorok összegének közelítő meghatározása

F13. Igazolja, hogy az alábbi sorok konvergensek. Számítsa ki a kijelölt s_n részletösszeget, és becsülje meg s_n-nek a sor összegétől való eltérését. Ezek alapján adja meg azt az intervallumot, amelyben a sor összege benne van.

(a) $\sum\limits_{n=0} \dfrac{1}{n!}$ s_4; (b) $\sum\limits_{n=0} \dfrac{1}{n!}$ s_6;

(c) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, s_5; (d) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n^2}$, s_4;

(e) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ s_4; (f) $\sum\limits_{n=0} \dfrac{1}{n!2^n}$ s_4.

F14. Mutassa meg, hogy az alábbi sorok konvergensek. Határozza meg, hogy milyen n indexű részletösszegei közelítik meg a sor összegét ε-nál kisebb hibával. Számítsa ki a megfelelő s_n részletösszeget, és ezek alapján adja meg azt az intervallumot, amelyben a sor összege benne van.

(a) $\sum\limits_{n=0} \frac{1}{n!}, \quad \varepsilon = 10^{-3};$

(b) $\sum\limits_{n=0} \frac{1}{n!}, \quad \varepsilon = 10^{-6};$

(c) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^2}, \quad \varepsilon = 10^{-4};$

(d) $\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \varepsilon = 10^{-4};$

(e) $\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^n}{n!}, \quad \varepsilon = 10^{-4};$

(f) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n!4^n}, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$

1.5. Számsorok konvergenciájának a vizsgálata

F15. Az alábbi sorok közül melyek konvergensek?

(a) $\sum\limits_{n=1} \sqrt[n]{0,1},$

(b) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n!},$

(c) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{2n-1},$

(d) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{1000n+1},$

(e) $\sum\limits_{n=1} \frac{n}{2n-1},$

(f) $\sum\limits_{n=1} \frac{1000^n}{n!},$

(g) $\sum\limits_{n=1} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}},$

(h)

F16. Az alábbi sorok közül melyek konvergensek?

(a) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{1+n^2},$

(b) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}},$

(c) $\sum\limits_{n=1} \frac{(n!)^2}{(2n)!},$

(d) $\sum\limits_{n=50} \frac{\big((n+2)!\big)^3}{(2n)!\,(n-1)!},$

(e) $\sum\limits_{n=0} \frac{n!}{2^n},$

(f) $\sum\limits_{n=1} \frac{n^2}{2^n},$

(g) $\sum\limits_{n=1} \frac{2n+1}{3^n},$

(h) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}},$

(i) $\sum\limits_{n=0} (-1)^n \frac{4n+8}{(2n+3)(2n+5)},$

(j) $\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$

(k) $\sum\limits_{n=0} \frac{2^{n^2}}{n!},$

(l) $\sum\limits_{k=1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right)^k,$

(m) $\sum\limits_{k=1} \left(1-\frac{1}{k}\right)^k$, (n) $\sum\limits_{k=1} \frac{k+1}{k^2}$,

(o) $\sum\limits_{n=1} \frac{n^n}{n!}$, (p) $\sum\limits_{k=1} \frac{n^n}{(2n)!}$,

(q) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$, (r) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^{(1+1/n)}}$,

(s) $\sum\limits_{n=1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n+1}$, (t)

F17. Konvergensek-e az alábbi sorok

(a) $\sum\limits_{n=0} \frac{1}{n+i}$, (b) $\sum\limits_{n=1} \frac{i^n}{n}$,

(c) $\sum\limits_{n=0} \frac{1}{\sqrt{n}+i}$, (d) $\sum\limits_{n=0} \frac{n(2+i)^n}{2^n}$,

(e) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n(3+i)^n}$, (f) $\sum\limits_{n=1} \frac{(1+i)^n}{(n+i)^2}$.

F18. Konvergensek-e a

(a) $\sum\limits_{n=1} \Big(\prod\limits_{k=1}^{n} (2-\sqrt[2k+1]{2})\Big)$, (b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt[k]{\frac{\pi}{4}}\Big(1-(\frac{\pi}{4})^{j_k}\Big)$,

sorok, ha az utóbbiban $j_k = \dfrac{-1}{k(k+1)}$ $(k \geq 1)$.

F19. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a $\sum\limits_{n=1} (x^n - x^{n-1})(x^n + x^{n-1})$ sor, és mennyi akkor a sor összege? (Mi a helyzet $x \in \mathbb{C}$ esetén?)

F20. Az x valós szám milyen értéke mellett konvergensek az alábbi végtelen sorok:

(a) $\sum\limits_{n=2} \frac{\big((n-1)!\big)^2}{\big(2(n-1)\big)!}x^n$, (b) $\sum\limits_{n=1} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$,

(c) $\sum\limits_{n=1} \frac{2^{n-1}}{2n-1}x^n$, (d) $\sum\limits_{n=1} \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}$,

(e) $\sum\limits_{n=1} \frac{n2^n}{n+1} \cdot \frac{1}{(3x^2+8x+6)^n}$, (f)

F21. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a

$$\text{(a)} \sum_{n=1} \frac{1}{n} \frac{x^n}{1-x^n}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{x^2-n^2}$$

sor? Mi a helyzet akkor, ha $x \in \mathbb{C}$? Vizsgálja meg az abszolút konvergenciát is.

F22. (a) Bizonyítsa be, hogy ha a D'Alembert-féle hányadoskritérium alkalmazható, akkor a Cauchy-féle gyökkritérium is alkalmazható.

(b) Mutassa meg, hogy az

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots$$

sor a gyökkritérium alapján konvergens, de a hányadoskritérium nem alkalmazható.

F23. Tekintsük azokat a természetes számokat, amelyek tizes számrendszerbeli alakjában nem fordul elő a 7 számjegy. Igazolja, hogy ezen számok reciprokainak az összege véges. Mutassa meg, hogy az összeg kisebb 80-nál.

F24. Tegyük fel, hogy (a_n) olyan nemnegatív tagú sorozat, amelyre a $\sum a_n$ sor konvergens. Igazolja, hogy ekkor a $\sum a_n^2$ sor is konvergens. Igaz-e ez fordítva is? Elhagyható-e az $a_n \geq 0$ feltétel?

F25. Legyen $(b_n) \searrow 0$, valamint $\sup\{|\sum_{k=0}^n a_k| : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$. Mutassa meg, hogy $\sum(a_n b_n)$ konvergens.

F26. Legyen $a_n, b_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Igazolja, hogy

(a) ha $0 < \lim\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) < +\infty$, akkor a $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha a $\sum b_n$ sor konvergens,

(b) ha $\lim\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = 0$ és a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum a_k$ sor is konvergens,

(c) ha $\lim\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \infty$ és a $\sum b_n$ divergens, akkor a $\sum a_n$ sor is divergens.

F27. **A Cauchy-féle kondenzációs elv:** Ha $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor a $\sum a_n$ és a $\sum \left(2^n a_{2^n}\right)$ sorok egyszerre konvergensek, illetve divergensek.

F28. A Cauchy-féle kondenzációs elv felhasználásával vizsgálja meg konvergencia szempontjából a $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ hiperharmonikus sort, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$. (Vö. **F4.**)

F29. Tegyük fel, hogy az (a_n) valós sorozat monoton csökkenve tart nullához. Mutassa meg, hogy ha a $\sum a_n$ sor konvergens, akkor $\lim(na_n) = 0$. Bizonyítsa be azt is, hogy az állítás megfordítása nem igaz.

1.6. Tizedestörtek

F30. (a) Adja meg az $1/3, 7/9, 2/5$ számok tizedestört alakját.

(b) Írja fel p/q $(p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ alakban a következő számokat:

$$0,123; \quad -7,000352; \quad 0,\dot{7}; \quad 0,12\dot{7}6\dot{3}; \quad 0,2\dot{3}2\dot{1}.$$

1.7. Műveletek számsorokkal

F31. Tegyük fel, hogy $\lim(a_n) = 0$. Igazolja, hogy a $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha a $\sum(a_{2n} + a_{2n+1})$ sor konvergens.

F32. Adjon példát olyan (a_n) nullasorozatra, amely által generált sor divergens, de a sornak van olyan zárójelezése, ami konvergens.

F33. Adjon meg olyan $\sum a_n$ valós sort, amelyre a következő teljesül: minden $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén a sornak van olyan zárójelezése, ami konvergens, és a zárójelezett sor összege α. A $\sum a_n$ sornak adjon meg egy olyan zárójelezését is, amelynek az összege α.

F34. Legyen $\sum a_n$ egy feltételesen konvergens sor. Adjon meg olyan átrendezést, hogy az átrendezett sor összege

(a) 12 legyen,

(b) $+\infty$-hez divergáljon.

F35. Határozza meg a $\sum_{n=0} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ és a $\sum_{n=0} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ sorok $\sum_{n=0} c_n$-nel jelölt Cauchy-szorzatát. Mutassa meg, hogy

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{3}\Big)^n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

F36. Képezze a $\sum_{n=0} q^n$ geometriai sor önmagával vett Cauchy-szorzatát. Ennek felhasználásával mutassa meg, hogy minden $|q| < 1$ komplex számra

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\Big)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)q^n.$$

Határozza meg a $\sum_{n=1} nq^n$ $(|q| < 1)$ sor összegét is. (Vö. **F10**.)

Mj1. **Sorok összegének a meghatározásáról.** Korábban már kihangsúlyoztuk azt, hogy „viszonylag kevés” sor összegét tudjuk meghatározni. Ilyenek voltak a *geometriai-*, a *teleszkópikus sorok*, valamint az *e számot előállító sor.* Egyedi eszközök (trükkök) felhasználásával persze további sorok összegét is meghatározhatjuk. Erre mutattunk egy példát az **F10.** feladatban. Az előző feladat azt **is** illusztrálja, hogy sorok Cauchy-szorzatára vonatkozó tételeinknek az elméleti jelentősége mellett gyakorlati „haszna” is van. E tételek segítségével „lényegesen bővíthetjük” azon sorok osztályát, amelyeknek az összegét meg tudjuk határozni. Ugyanis, ha sikerül egy sort két ismert összegű sor Cauchy-szorzataként előállítani, akkor a kiindulási sor összege a két tényező összegének a szorzata.

F37. Mutassa meg, hogy

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\Big)\cdot\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n!}.$$

F38. Mutassa meg, hogy

(a) $\sum\big((-1)^n\frac{1}{n}\big)\times\sum\big((-1)^n\frac{1}{n}\big)$ konvergens,

(b) $\sum\big((-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\big)\times\sum\big((-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\big)$divergens,

ahol $\times$ a Cauchy-szorzást jelöli.

F39. Mutassa meg, hogy az

$$1-\sum_{n=1}\Big(\frac{3}{2}\Big)^n \quad \text{és az} \quad 1+\sum_{n=1}\Big(\frac{3}{2}\Big)^{n-1}\Big(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\Big)$$

sorok divergensek, de a Cauchy-szorzatuk abszolút konvergens.

F40. Bizonyítsa be, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(ax)^k}{1-x^k}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ax^n}{1-ax^n} \qquad (|a|\le 1,\ |x|<1).$$

2. Hatványsorok

2.1. A konvergenciahalmaz meghatározása

F41. Milyen $x \in \mathbb{K}$ esetén konvergensek az alábbi hatványsorok:

(a) $\sum\limits_{n=1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot x^n \quad (x \in \mathbb{C})$,

(b) $\sum\limits_{n=0} \alpha^{2n} x^n \ (x \in \mathbb{C}, \quad 0 < \alpha < 1)$,

(c) $\sum\limits_{n=0} \frac{n!}{a^{n^2}} \cdot x^n \ (x \in \mathbb{C}, \quad 1 < a)$,

(d) $\sum\limits_{n=1} \frac{(x-i)^n}{n^p} \ (x \in \mathbb{C}, \quad p > 1)$,

(e) $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{4^n(2n-1)}(x+5)^{2n-2} \ (x \in \mathbb{R})$.

F42. Legyen $c_{2n} = 1$, $c_{2n+1} = 2$ $(n \in \mathbb{N})$. Keresse meg a $\sum\limits_{n=0} c_n x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor konvergenciahalmazát, és határozza meg az összegfüggvényt.

F43. Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergencia-halmazát $\mathbb{R}$-ben:

(a) $\sum\limits_{n=1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$, (b) $\sum\limits_{n=1} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n$,

(c) $\sum\limits_{n=1} \frac{(x-5)^n}{a^{\sqrt{n}}} \quad (a > 1)$, (d) $\sum\limits_{n=1} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}} x^n$.

F44. Tetszőleges, de rögzített $k \in \mathbb{N}$ esetén számítsa ki a $\sum\limits_{n=0} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$ hatványsor konvergenciasugarát.

F45. Adjon meg olyan hatványsort, amelynek konvergenciahalmaza

(a) $(-1, 1),\ (-1, 1],\ [-1, 1),\ [-1, 1]$,

(b) $(-a, b),\ (-a, b],\ [-a, b),\ [-a, b] \quad (a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$.

F46. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0} c_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara 2, a $\sum_{n=0} d_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara pedig 3. Mennyi lesz a $\sum_{n=0}(c_n + d_n)x^n$ sor konvergenciasugara?

2.2. Függvények hatványsorba fejtése

Mj2. Később látni fogjuk azt, hogy több szempontból is hasznos, ha egy adott függvényhez találunk olyan hatványsort, amelynek az összegfüggvénye valamilyen intervallumon a szóban forgó függvénnyel egyenlő (röviden: „a függvényt hatványsorba tudjuk fejteni"). Az alábbi példák azt illusztrálják, hogy már az eddig rendelkezésünkre álló eszközök segítségével is számos függvényt tudunk hatványsorba fejteni. Később egy általános módszert is mutatunk ennek a problémának a kezeléséhez.

F47. Igazolja az alábbi egyenlőségeket:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2} \quad (z \in \mathbb{C},\ |z| < 1),$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)z^{n-2} = \frac{2}{(1-z)^3} \quad (z \in \mathbb{C},\ |z| < 1).$

F48. Állítsa elő az alábbi függvényeket egy alkalmas intervallumban az $a = 0$ pont körüli hatványsor összegfüggvényeként:

(a) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}),$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$

(c) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x^3} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}),$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{1+x-2x^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2, 1\}),$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}),$

(f) $f(x) = \cos^2 x \quad (x \in \mathbb{R}),$ (g) $f(x) = \sin x \cos x \quad (x \in \mathbb{R}).$

2.3. Egyéb feladatok

F49. Igazolja, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ számra fennállnak az alábbi egyenlőségek:

(a) $\operatorname{ch}(iz) = \cos z, \quad \cos(iz) = \operatorname{ch} z,$

(b) $\operatorname{sh}(iz) = i \sin z, \quad \sin(iz) = i \operatorname{sh} z.$

F50. Mutassa meg, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ valós számra

(a) $\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,$

(b) $\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$,

(c) $\operatorname{sh}(x+iy) = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$,

(d) $\operatorname{ch}(x+iy) = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$.

F51. Bizonyítsa be az alábbi azonosságokat:

(a) $\dfrac{\sin x}{1-x} = x + x^2 + \frac{5}{5}x^3 + \frac{101}{120}x^5 + \cdots \quad (x \in (-1,1))$,

(b) $e^{-x}\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{25}{24}x^2 - \frac{331}{720}x^3 + \cdots \quad (x \in [0,+\infty)$.

F52. Keressen explicit előállítást az

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1 \quad \text{és} \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \qquad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$$

Fibonacci sorozatra.

II. rész

Megoldások

1. Számsorok

1.1. Nevezetes számsorok

M4. Azt már tudjuk, hogy a $\sum_{n=1} \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens. Mivel minden $\alpha < 1$ valós számra $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ $(n \in \mathbb{N})$, ezért a minoráns kritérium alapján a $\sum_{n=1} \frac{1}{n^\alpha}$ sor is divergens minden $\alpha < 1$ esetén.

Ha $\alpha > 1$, akkor kettőhatvány közötti csoportokat képezünk. Mivel

$$\frac{1}{(2^k+1)^\alpha}+\frac{1}{(2^k+2)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2^k+2^k)^\alpha} \leq 2^k\frac{1}{(2^k)^\alpha} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k \qquad (k=0,1,\ldots),$$

és $\alpha > 1$ miatt a $\sum_{k=0}\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$ geometriai sor konvergens, ezért a majoráns kritérium alapján a $\sum_{n=1} \frac{1}{n^\alpha}$ sor konvergens minden $\alpha > 1$ valós számra. ■

1.2. Komplex tagú sorozatok konvergenciája

M7. (a) $z_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{i}{n+1}$. Az összeg első tagja nyilván 1-hez tart a határérték és műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel alapján, míg a második tag 0-hoz, hiszen korlátos sorozatot osztunk végtelenhez tartó sorozattal. A (z_n) sorozat határértéke tehát 1.

(c) Mivel mértani sorozatról van szó, elegendő meghatározni $q = 1-i$ abszolút értékét. A q szám valós része 1, képzetes része -1, így $|q| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} > 1$, ezért a (z_n) sorozat divergens.

(e) A második tényező, $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ tart 1-hez, (z_n) azonban divergens az első tényező miatt. Ugyanis ha $n = 4k$ alakú $(k \in \mathbb{N})$, akkor $i^n = 1$, míg ha $n = 4k+2$ alakú, akkor $i^n = -1$, tehát (z_n)-nek van legalább két (valójában nyilván 4) olyan részsorozata, melyek határértéke különböző: $z_{4k} \to 1$, $z_{4k+2} \to -1$ (és nyilván $z_{4k+1} \to i$, $z_{4k+3} \to -i$), ha $k \to +\infty$.

(g) A (z_n) olyan mértani sorozat, melynek a hányadosa $q = \frac{(1+i)^2}{3}$. Mivel $|q| = \frac{2}{3} < 1$, így (z_n) konvergens, és 0 a határértéke. ■

1.3. Számsorok összegének meghatározása

M8. (b) A sor két geometriai sor összege: $\sum\limits_{n=1}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right) = \sum\limits_{n=1}\frac{1}{2^n} + \sum\limits_{n=1}\frac{1}{3^n}$. A jobb oldali két sor mindegyike konvergens, hiszen mértani sorok abszolút értékben 1-nél kisebb hányadossal. A mértani sor összegképlete szerint $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1$. (Itt fontos volt, hogy a bal oldalon az index csak 1-től fut, így a mértani sor összegképletéből az $n = 0$-hoz tartozó tagot le kell vonni: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\big) - \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1$.) Hasonlóan kapjuk, hogy $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1$, ezért

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2}.$$

(c) A sor konvergens, hiszen a gyökkritérium alapján $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|2n-1|}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$. Az sorösszeg meghatározásához bontsuk szét a sort például $2\sum\limits_{n=1} \frac{n}{2^n} - \sum\limits_{n=1} \frac{1}{2^n}$ alakban. (A felbontás jogos, mert mindkét sor konvergens.) Az elsőhöz használjuk az **F10.** feladatot $q = \frac{1}{2}$-del. A második pedig mértani sor (vigyázzunk az indexeltolásra!).

(g) A sor konvergens, mert egy majoráns például $0 < \frac{1}{n(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^3}$ és $\sum_{n=1} \frac{1}{n^3}$ konvergens.

Az összeg meghatározásához alkalmazzuk a $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ sornál megismert trükköt:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big)\frac{1}{n+2} = \frac{1}{n(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\Big) - \Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\Big) = \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}.$$

Ennek felhasználásával tekintsük most a vizsgált sor N-edik részletösszegét: $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1/2}{n} + \frac{-1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}\right)$. Vegyük észre, hogy ez egy teleszkópikus összeg, ha a hármas összegből egymás alá írunk 3, egymás utáni tagot (például az $n-1$, n, $n+1$ indexhez tartozókat):

$$\ldots + \left(\frac{1/2}{n-1} + \frac{-1}{n-1+1} + \frac{1/2}{n-1+2}\right) +$$
$$\left(\frac{1/2}{n} + \frac{-1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}\right) +$$
$$\left(\frac{1/2}{n+1} + \frac{-1}{n+1+1} + \frac{1/2}{n+1+2}\right) + \ldots$$

Itt az első zárójel jobb tagja és a harmadik zárójel bal tagja kiejti a középső zárójel középső tagját, a $\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1/2}{n} + \frac{-1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}\right)$ összegben a tagok tehát átlósan kiesnek, kivéve az összeg elején és végén azok a tagok (pontosan 6 darab), amelyek nem részei egy teljes átlónak. Így $\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1/2}{n}+\frac{-1}{n+1}+\frac{1/2}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2(N-1+2)}-\frac{1}{N+1}+\frac{1}{2(N+2)}$. Ebből már $N\to+\infty$ esetén közvetlenül látszik, hogy $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}$.

(h) A sor két konvergens mértani sor összegére bontható. Az első mértani sor esetén $q=\frac{-1}{5}$, a második mértani sorrá alakítható, ha a 4-es szorzótényezőt a szumma elé hozzuk, és $q=\frac{1}{5}$-öt választunk. Vigyázzunk, hogy az index itt is csak 1-től fut, tehát az $n=0$-hoz tartozó tagokat le kell vonnunk. A végeredmény: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n+4}{5^n}=\frac{5}{6}$. ■

M10. A hányadoskritérium és a sorok konvergenciájára vonatkozó szükséges feltétel alapján a sor akkor és csak akkor konvergens, ha $|q|<1$. Az összeg meghatározásához alkalmazzuk a következő *trükköt.* Legyen $s_N:=\sum_{n=1}^{N}nq^n$ és tekintsük az s_N-qs_N különbséget:

$$\begin{aligned}&s_N-qs_N=\\&=(q+2q^2+3q^3+\cdots+Nq^N)-(q^2+2q^3+\cdots+(N-1)q^N+Nq^{N+1})=\\&=(q+q^2+\cdots+q^N)-Nq^{N+1}=q\frac{1-q^N}{1-q}-Nq^{N+1}.\end{aligned}$$

amiből

$$s_N=\frac{q}{(1-q)^2}(1-q^N)-\frac{1}{1-q}Nq^{N+1}$$

adódik. A végeredményt ebből $N\to+\infty$ esetén kapjuk ($|q|<1$ miatt Nq^N is zérussorozat!), tehát

$$\sum_{n=1}^{+\infty}nq^n=\frac{q}{(q-1)^2}.\quad ■$$

M11. (b) A sor mértani, $q=\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)$-vel. Mivel $|q|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$, ezért a sor konvergens és összege $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)^n=\frac{1}{1-q}$=1+i. ■

M12. Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}&=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\cdot\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\\&=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.\end{aligned}$$

Az eredeti sor helyett annak N-edik részletösszegét véve látható, hogy az összeg teleszkopikus, és $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{N+1}}$. A sor tehát konvergens és az összege 1.

1.4. Számsorok összegének közelítő meghatározása

M13. (d) A sor konvergenciáját már beláttuk. Az első 4 tagot összeadva $s_4 = \frac{205}{144} \approx 1,4236$. s_4 eltérését a sorösszegtől becsülhetjük például így:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n^2} <$$

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=5}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) =$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=5}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{N} \right) = \frac{1}{4}.$$

Mivel a részletösszegek sorozata szigorúan monoton növő, ezekből azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \in \left(\frac{205}{144}, \frac{205}{144} + \frac{1}{4} \right) = \left(\frac{205}{144}, \frac{205}{144} + \frac{241}{144} \right) \subset (1,4236\ ,\ 1,67362).$$

Megjegyezzük, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ pontos értéke $\frac{\pi^2}{6} \approx 1,64493$. ■

1.5. Számsorok konvergenciájának a vizsgálata

M15. (a) A sor divergens, mert tagjai nem tartanak 0-hoz, hiszen $\sqrt[n]{0,1} \to 1$, ha $n \to +\infty$.

(d) A sor divergens, mert $\frac{1}{1000n+1} \geq \frac{1}{1001n}$ miatt $\sum_{n=1} \frac{1}{1000n+1} \geq \frac{1}{1001} \sum_{n=1} \frac{1}{n}$ egy divergens minoráns.

(e) A sor divergens, mert tagjai nem tartanak 0-hoz.

(f) Legyen $a_n := \frac{1000^n}{n!}$. Mivel $|a_{n+1}/a_n| = \frac{1000^{n+1}/(n+1)!}{1000^n/n!} = \frac{1000}{n+1} \to 0 < 1$, így a hányadoskritérium alapján a sor konvergens. ■

M16. (b) A sor a majoráns kritérium miatt konvergens, mert az eredeti nemnegatív tagú sor n-edik tagja felülről becsülhető, mint $\frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}} \leq \frac{1}{\sqrt{n \cdot n^2}} = \frac{1}{n^{3/2}}$, amely utóbbi tagokból képezett sor konvergens hiperharmonikus sor.

(c) Legyen $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Mivel $|a_{n+1}/a_n| = \frac{1+n}{2+4n} \to \frac{1}{4} < 1$, a hányadoskritérium alapján a sor konvergens.

(j) Ellenőrizhető, hogy a sor Leibniz-típusú, így konvergens.

(l) Ha $k \geq 4$, akkor $0 \leq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\right)^k \leq \left(\frac{5}{6}\right)^k$, így $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\right)^k \leq \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\right)^k + \sum_{k=4}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^k$. A jobb oldal egy véges összeg és egy konvergens mértani sor összege. Az eredeti sor tehát konvergens.

(Alternatív megoldás: a gyökkritérium alapján a sor konvergens, mert

$$\sqrt[k]{\left|\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\right)^k\right|} = \frac{1}{2}+\frac{1}{k} \to \frac{1}{2} < 1, \quad \text{ha } k \to +\infty.)$$

(m) A sor divergens, mert tagjai $\frac{1}{e}$-hez tartanak, ui.

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)^k = \left(\frac{k-1}{k}\right)^k = \frac{1}{\left(\frac{k}{k-1}\right)^k} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^k} =$$
$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{k-1}} \to \frac{1}{e}, \qquad \text{ha } k \to +\infty,$$

és ez nem nullasorozat.

(r) A sor divergens, mert az n-edik tag nemnegatív és alulról becsülhető egy divergens sor n-edik tagjával: $\frac{1}{n^{(1+1/n)}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}$, ha $n \geq N$, alkalmas $N \geq 1$ küszöbindexszel (amely létezik, mert $\sqrt[n]{n} \to 1$, ha $n \to +\infty$).

(s) Alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}}.$$

Az első tényező határértéke $\frac{1}{e}$, a másodiké 1. A harmadik tényező

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2}} = \sqrt[n]{\frac{n}{n+n}} \leq \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} \leq \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+1}} = 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és $\sqrt[n]{2} \to 1$ $(n \to +\infty)$ miatt szintén 1-hez tart. Ezért

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n+1}} = \frac{1}{e} < 1.$$

A gyökkritérium alapján a sor tehát konvergens. ■

M17. (c) Szétbontva a törtet valós- és képzetes részre (a szokásos módon: a $\sqrt{n}-i$ konjugálttal bővítve a törtet) $\frac{1}{\sqrt{n}+i} = \frac{\sqrt{n}}{n+1} - i\frac{1}{n+1}$ látható, hogy az eredeti sor valós része és képzetes része is divergens (hiszen a tagok nagyságrendje $\frac{1}{\sqrt{n}}$, illetve $\frac{1}{n}$).

(d) Ellenőrizhető, hogy a tagok nem tartanak 0-hoz (vegyük ugyanis a tagok abszolút értékét), a sor tehát divergens.

(e) A sor abszolút konvergens, hiszen $\left|\frac{1}{n(3+i)^n}\right| \leq \frac{1}{|3+i|^n} = \frac{1}{(\sqrt{10})^n}$ egy abszolút konvergens majoránssor n-edik tagja.

M18. Az (a)-ban legyen $\sqrt[2k+1]{2} = 1 + h_k$. Ekkor Bernoulli-egyenlőtlenség szerint $2 > 1 + (2k+1)h_k$. Ebből az következik, hogy $h_k < \dfrac{1}{2k+1}$, azaz

$$2 - \sqrt[2k+1]{2} = 1 - h_k > 1 - \frac{1}{2k+1} = \frac{2k}{2k+1}.$$

Következésképpen $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(2 - \sqrt[2k+1]{2}\right) \geq \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}$. Mivel $h_k < \dfrac{1}{2k}$ is igaz, ezért a fenti gondolatmenet alapján

$$\prod_{k=1}^{n}\left(2 - \sqrt[2k+1]{2}\right) \geq \prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$$

A két becslés kombinációjából azt kapjuk, hogy

$$\prod_{k=1}^{n}\left(2 - \sqrt[2k+1]{2}\right) \geq \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k} \cdot \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Innen az összehasonlító kritérium szerint a sor divergens.

A (b) feladat teleszkopikus, mert beszorzás után a k-adik tagra $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/k} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/(k+1)}$ adódik. ■

M20. (b) Legyen $y := x^2$. Ha $x = 0$, a sor nyilván konvergens. Legyen tehát a továbbiakban $x \neq 0$, azaz $y > 0$, akkor az $\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} = \frac{1}{\frac{1}{y^n}+y^n}$ átalakítás alapján két esetet érdemes vizsgálni: ha $y > 1$, akkor $0 < \frac{1}{\frac{1}{y^n}+y^n} < \frac{1}{y^n}$, míg ha $0 < y < 1$, akkor $0 < \frac{1}{\frac{1}{y^n}+y^n} < \frac{1}{\frac{1}{y^n}}$ egy-egy konvergens (mértani) majoránssor n-edik tagja. Ha viszont $y = 1$, akkor könnyen látható, hogy az eredeti sor divergens. Összefoglalva: a sor minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ esetén konvergens, egyébként divergens.

(c) A sor általános tagja $\frac{1}{2(2n-1)}(2x)^n$, amiből látható, hogy a sor tagjai $|x| > \frac{1}{2}$ esetén nem tartanak 0-hoz (hiszen tudjuk, hogy q^n/n divergens, ha $|q| > 1$), a sor ilyen x-ekre tehát biztosan divergens. Ha $x = \frac{1}{2}$, a sor szintén divergens (minoráljuk ugyanis a divergens harmonikus sorral). Ha $x = -\frac{1}{2}$, a sor Leibniz-típusú, tehát konvergens. Ha $|x| < \frac{1}{2}$, akkor $\left|\frac{1}{2(2n-1)}(2x)^n\right| < (2x)^n$ egy konvergens (mértani) majoráns, így a sor ilyen x-ekre konvergens.

(e) Alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$$\sqrt[n]{\frac{n2^n}{n+1}\cdot\frac{1}{|3x^2+8x+6|^n}} =$$

$$= \frac{2\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+1}}\cdot\frac{1}{|3x^3+8x+6|} \to \frac{2}{|3x^2+8x+6|} \quad (n\to+\infty).$$

Mivel $8^2 - 4\cdot 3\cdot 6 < 0$, ezért $3x^3 + 8x + 6 > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Így

$$0 < \frac{2}{|3x^2+8x+6|} < 1 \iff 0 < 3x^2+8x+4 \iff x \in (-\infty,-2)\cup(-2/3,+\infty).$$

Ilyen x-ekre a sor tehát konvergens.

Mivel

$$\frac{2}{|3x^2+8x+6|} > 1 \iff 0 > 3x^2+8x+4 \iff x \in (-2,-2/3),$$

ezért ezekben az esetekben a sor divergens.

Legyen $x = -2$. Ekkor a $\sum_{n=1}\frac{n2^n}{n+1}\cdot\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}\frac{n}{n+1}$ sor adódik, ami divergens, mert az $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ nem nullasorozat.

Ha $x = -\frac{2}{3}$, akkor is a divergens $\sum_{n=1}\frac{n2^n}{n+1}\cdot\frac{1}{2^n}$ sort kapjuk.

Összefoglalva: a sor az $x \in (-\infty,-2)\cup(-\frac{2}{3},+\infty)$ pontokban konvergens, az $x \in [-2,-\frac{2}{3}]$ pontokban pedig divergens, azaz a konvergenciahalmaza:

$$KH\Big(\sum_{n=1}\frac{n2^n}{n+1}\cdot\frac{1}{3x^2+8x+6}\Big) = \big(-\infty,-2\big)\cup\big(-\frac{2}{3},+\infty\big). \quad \blacksquare$$

M23. A $10^{m-1}-1$ és 10^m-1 között azon természetes számok száma, amelyek nem tartalmazzák a 7 számjegyet $9^m - 9^{m-1}$. Ezért a kérdezett összeg kisebb, mint

$$\frac{9-1}{1}+\frac{9^2-9}{10}+\frac{9^3-9^2}{10^2}+\cdots = 80. \quad \blacksquare$$

M24. Mivel a $\sum a_n$ sor konvergens, ezért $\lim(a_n) = 0$, tehát létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $0 \le a_n \le 1$ minden $n \ge n_0$ természetes számra. Ezekre az indexekre akkor $0 \le a_n^2 \le a_n$ is teljesül. Az állítás tehát a majoráns kritárium alapján igaz. Az állítás megfordítása azonban nem igaz, mert például a $\sum \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, de a $\sum \frac{1}{n}$ sor divergens. Az $a_n \ge 0$ feltétel sem hagyható el, mert például a $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ sor konvergens, a $\sum \frac{1}{n}$ sor azonban divergens. ■

M26. (a) A $0 < \lim(a_n/b_n) < +\infty$ feltételből következik, hogy léteznek olyan c_1, c_2 pozitív számok és $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy

$$c_1 b_n \le a_n \le c_2 b_n \qquad \text{minden } n \ge n_0 \text{ esetén.}$$

(Ez azt jelenti, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozat „azonos nagyságrendű”.) Alkalmazza most a majoráns kritériumot. ■

M27. Használjuk fel, hogy

$$a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + \left(a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}\right) \le a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^n a_{2^n},$$

illetve

$$a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + \left(a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}\right) \ge$$
$$\frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^n} = \frac{1}{2}\left(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n}\right).$$

M29. A $\sum a_n$ sor konvergens, ezért a sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium alapján $\forall\,\varepsilon > 0$ számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n}| < \varepsilon \qquad \forall\, n \ge n_0 \ \text{ esetén.}$$

Az (a_n) sorozat monoton csökkenve tart nullához (így $a_n \ge 0$ is teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ számra), ezért

$$\varepsilon > |a_n + \cdots + a_{2n}| = a_n + \cdots + a_{2n} \ge n a_{2n} \qquad (n \ge n_0),$$

tehát $\lim(2n a_{2n}) = 0$. Hasonlóan igazolható, hogy $\lim\big((2n+1)a_{2n+1}\big) = 0$, tehát $\lim(n a_n) = 0$ valóban fennáll.

Most megmutatjuk, hogy az állítás megfordítása nem igaz. Ehhez felhasználjuk azt a (megjegyzésre is érdemes) tényt, hogy a

$$\sum_{n=2} \frac{1}{n \log n} \quad \text{sor divergens,}$$

ahol log az e-alapú logaritmusfüggvényt jelöli. Ez az állítás a Cauchy-féle kondenzációs elv egyszerű következménye. Tekintsük ezután az $a_n := \frac{1}{n \log n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ sorozatot. Ez a sorozat monoton csökkenve tart nullához, a $\lim(n a_n) = \lim\big(\frac{1}{\log n}\big) = 0$ is teljesül, továbbá a $\sum a_n$ sor divergens. ■

1.6. Tizedestörtek

M30. Például:

$$0,2\dot{3}2\dot{1} = \frac{2}{10} + \Big(\frac{3}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{1}{10^4}\Big) + \Big(\frac{3}{10^5} + \frac{2}{10^6} + \frac{1}{10^7}\Big) + \cdots =$$
$$= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2}\Big(1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \cdots\Big) + \frac{2}{10^3}\Big(1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \cdots\Big) +$$
$$+ \frac{1}{10^4}\Big(1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \cdots\Big) =$$
$$= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^3}} + \frac{2}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^3}} + \frac{1}{10^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^3}} =$$
$$= \frac{2}{10} + \frac{30}{999} + \frac{2}{999} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{999} = \frac{2 \cdot 999 + 300 + 20 + 1}{9990} = \frac{2319}{9990} = \frac{773}{3330}.$$

1.7. Műveletek számsorokkal

M31. A $\sum(a_{2n}+a_{2n+1})$ sor a $\sum a_n$ sor egy zárójelezett sora; ezért ha a $\sum a_n$ sor konvergens, akkor a $\sum(a_{2n} + a_{2n+1})$ sor is konvergens. Az állítás megfordításának az igazolásához ellenőrizzük, hogy teljesülnek a zárójelek elhagyására vonatkozó tételünk feltételei. ■

M32. Tekintsük a következő sort:

$$(1-1) + \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7}\Big) + \cdots +$$
$$+ \Big(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^k+2^k-1} - \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^k+1} - \cdots - \frac{1}{2^k+2^k-1}\Big) + \cdots$$

Ez a sor konvergens, és az összege nullával egyenlő. A zárójelek elhagyásával képzett $\sum a_n$ sort valóban egy nullasorozat generálja. A $\sum a_n$ sor részletösszegeinek van olyan részsorozata, amelynek mindegyik tagja nulla. Másrészt az

$$\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^k+2^k-1} > 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

miatt a $\sum a_n$ sor részletösszegeinek van olyan részsorozata is, amelyiknek mindegyik tagja > 1. Ez pedig azt jelenti, hogy a részletösszegek sorozata nem konvergens, azaz a $\sum a_n$ sor divergens. ■

M33. A racionális számok halmaza sorozatba rendezhető, azaz létezik $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijekció. Legyen az (r_n) sorozat egy ilyen bijekció, és legyen

$$a_0 := 0, \quad a_1 := r_1, \quad a_2 := r_2 - r_1, \quad a_3 := r_3 - r_2, \quad \ldots, \quad a_n := r_n - r_{n-1}, \ldots$$

Ekkor a
$$\sum_{n=0} a_n = \sum_{n=0} (r_n - r_{n-1}) \qquad (r_{-1} := 0)$$
sor rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Ezt igazolandó mutassa meg, hogy

(i) tetszőleges $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ elemhez van olyan $(t_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ $(t_i \neq t_j, i, j \in \mathbb{N}, i \neq j)$ sorozat, amelyikre $\lim(t_n) = \alpha$ teljesül;

(ii) a (t_n) sorozat bármelyik átrendezése konvergens, és a határértéke α;

(iii) a (t_n) sorozatnak van olyan átrendezése, amelyik az (r_n) sorozatnak egy (ν_n) indexsorozat által generált részsorozata.

(iv) a $\sum a_n$ sor (ν_n) indexsorozat által meghatározott zárójelezése konvergens, és az összege α. ■

M34. A sor végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tagot tartalmaz. (Miért?) Jelöljük a $\sum a_n$ feltételesen konvergens sor pozitív tagjaiból álló (divergens!) sort $\sum b_n$-nel (tehát $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$), a negatív tagokból álló (szintén divergens!) sort $\sum c_n$-nel (tehát $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = -\infty$).

(a) Válasszunk annyi pozitív tagot, amíg az összeg nagyobb lesz 12-nél
$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{k_1} > 12 \quad \text{de} \quad b_1 + b_2 + \cdots + b_{k_1 - 1} < 12;$$
ezután adjunk hozzá negatív tagokat, amíg az összeg kisebbé válik 12-nél:
$$b_1 + \cdots + b_{k_1} + c_1 + \cdots + c_{j_1} < 12 \quad \text{de} \quad b_1 + \cdots + b_{k_1} + c_1 + \cdots + c_{j_1 - 1} > 12.$$
Ezután adjunk hozzá ismét annyi pozitív tagot, amíg az összeg nagyobbá válik 12-nél, $\cdots$. Annak igazolásához, hogy az ilyen módon átrendezett sor összege valóban 12, mutassa meg, hogy $|s_n - 12|$ nem nagyobb, mint az s_n-ben szereplő utolsó pozitív tag és az s_n-ben szereplő utolsó negatív tag abszolútértékének a maximuma.

(b) Vegyünk most egy tetszőleges, $+\infty$-hez tartó szigorúan monoton növő (p_n) sorozatot. Válasszunk ki a $\sum b_n$ pozitív tagú sorból annyi tagot, amíg az összeg nagyobb lesz $p_1 - c_1$-nél (c_1 az átrendezendő sor első negatív tagja):
$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{k_1} \geq p_1 - c_1.$$
Adjuk hozzá ehhez c_1-et. Folytassuk ezt az eljárást. ■

M35. A Cauchy-szorzat definíciója szerint
$$c_n = \sum_{i=0}^{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i,$$

amiből látjuk, hogy ha n páros, akkor $c_n = 0$, míg ha n páratlan, akkor $c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Így $\sum_{n=0} c_n = \sum_{n=0} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$.
Másrészt a mértani sorok összegképleteiből

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3^2}} = \frac{9}{8},$$

tehát valóban

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} (-\frac{1}{3})^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{3})^n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n,$$

mivel $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$. ■

Megjegyzés. Mivel két abszolút konvergens (mértani) sor Cauchy-szorzatáról van szó, a feladat állítása az abszolút konvergens sorok Cauchy-szorzatára vonatkozó tételünkből eleve következik. Ezt tehát most a tételtől függetlenül ellenőriztük. ■

M36. Jelölje $\sum_{n=0} c_n$ a $\sum_{n=0} q^n$ mértani sor ($|q| < 1$) önmagával vett Cauchy-szorzatát, azaz legyen $\sum_{n=0} c_n := (\sum_{n=0} q^n) \times (\sum_{n=0} q^n)$. Ekkor a Cauchy szorzat definíciója szerint $c_n = \sum_{i=0}^{n} q^i q^{n-i} = (n+1)q^n$. Mivel az eredeti két sor abszolút konvergens, így a Cauchy-szorzat konvergens és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)q^n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\Big).$$

A $\sum_{n=1} nq^n$ sor összegét **F10**-ben már meghatároztuk. Most a fentiek felhasználásával alternatív megoldást adunk: az imént beláttuk, hogy

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)q^n.$$

Kiemeléssel és indexeltolással kapjuk, hogy a jobb oldal $q \neq 0$ esetén

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)q^n = \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)q^{n+1} = \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} nq^n,$$

s így $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\right)^2 = \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} nq^n$. A bal oldal nyilván $\left(\frac{1}{1-q}\right)^2$, amiből q-val való átszorzással kapjuk, hogy $0 \neq |q| < 1$ esetén $\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$. (A képlet levezetése a $q = 0$ esetben pedig triviális.) ■

M37. Jelölje $\sum_{n=0} c_n$ a $\sum_{n=0} \frac{2^n}{n!}$ és a $\sum_{n=0} \frac{3^n}{n!}$ sor Cauchy-szorzatát. A Cauchy-szorzat definíciója szerint $c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{2^i}{i!} \cdot \frac{3^{n-i}}{(n-i)!}$. Először megmutatjuk, hogy $c_n = \frac{5^n}{n!}$. Valóban, alkalmazva a binomiális tételt $5^n \equiv (2+3)^n$-re, és felhasználva, hogy $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$, kapjuk, hogy $\frac{1}{n!}(2+3)^n = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i \cdot 3^{n-i} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}2^i \cdot 3^{n-i}$, ez utóbbi kifejezés viszont éppen c_n-nel egyenlő.

Eddig tehát megállapítottuk, hogy $\left(\sum_{n=0} \frac{2^n}{n!}\right) \times \left(\sum_{n=0} \frac{3^n}{n!}\right) = \sum_{n=0} \frac{5^n}{n!}$. Mivel azonban a Cauchy-szorzat mindkét tényezője abszolút konvergens (ami például a hányadoskritériummal látható), ezért az abszolút konvergens sorok Cauchy-szorzatára vonatkozó tétel alapján a Cauchy-szorzat összege egyenlő a tényező-sorok összegének a szorzatával, azaz a

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$$

egyenlőség valóban teljesül.■

M38. (a) A Cauchy-szorzat definíciója szerint $n \geq 1$ esetén

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i} \cdot \frac{(-1)^{n+1-i}}{n+1-i}.$$

Az alábbi 1–3. lépésekben meg fogjuk mutatni, hogy a c_n sorozat Leibniz-típusú, így a $\sum_{n=1} c_n$ Cauchy-szorzat sor konvergens.

0. lépés. Először c_n-et ügyes módon írjuk fel; olyan alakban, amivel kényelmesen tudunk dolgozni a továbbiakban. A rövidség kedvéért $n \geq 1$ esetén jelölje

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

az n-edik *harmonikus számot.* Azt állítjuk, hogy $n \geq 1$ esetén

$$c_n = (-1)^{n+1}\frac{2H_n}{n+1}. \tag{1.1}$$

Valóban, tekintsük $(n+1)c_n$-et, alkalmazzunk parciális törtfelbontást és átindexelést:

$$(n+1)c_n = (n+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i} \cdot \frac{(-1)^{n+1-i}}{n+1-i} = (-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n} \frac{n+1}{i(n+1-i)} =$$

$$(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{n+1-i}\right) = (-1)^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right) = (-1)^{n+1}2H_n.$$

Az egyenlőséglánc bal és jobb szélét összevetve adódik (1.1).

1. lépés. A c_n sorozat alternáló volta közvetlenül látszik az imént meghatározott (1.1) alakból.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy c_n abszolút értékben monoton fogy, azaz minden $n \geq 1$ esetén

$$|c_{n+1}| \leq |c_n|.$$

Nyilván elegendő megmutatni, hogy $\frac{1}{2}(|c_n| - |c_{n+1}|) \geq 0$. Ismét használjuk (1.1)-et.

$$\frac{1}{2}(|c_n| - |c_{n+1}|) = \frac{H_n}{n+1} - \frac{H_{n+1}}{n+2} = \frac{(n+2)H_n - (n+1)H_{n+1}}{(n+1)(n+2)} =$$

$$\frac{(n+2)H_n - (n+1)(H_n + \frac{1}{n+1})}{(n+1)(n+2)} = \frac{H_n - 1}{(n+1)(n+2)} \geq 0,$$

mert $n \geq 1$ mellett $H_n \geq 1$.

3. lépés. Végül belátjuk, hogy $|c_n| \to 0$, ha $n \to \infty$. A bizonyítás alapgondolata nem új: lényegében ugyanazt tesszük, mint amit a Cauchy-féle kondenzációs elvnél, vagyis 2-hatványonként csoportosítunk egy szummát. (1.1) miatt elegendő belátni, hogy $\frac{H_n}{n+1} \to 0$, ha $n \to \infty$.

A 2. lépésben megmutattuk, hogy a $H_n/(n+1)$ sorozat monoton fogyó. Ez a sorozat nyilván nemnegatív, így alulról korlátos. $H_n/(n+1)$-nek tehát létezik (nemnegatív) határértéke; azt kell bebizonyítanunk, hogy ez a limesz 0. A határérték egyértelműsége miatt az eredeti $H_n/(n+1)$ sorozat helyett áttérhetünk egy általunk tetszőlegesen választott részsorozatra. Az $n = 2^m - 1$ részsorozatot választva például a 3. lépés befejezéséhez elég megmutatni, hogy $\frac{H_{2^m-1}}{2^m} \to 0$, amint $m \to \infty$.

Legyen $m \geq 1$ tetszőleges egész. Ekkor

$$H_{2^m-1} = \sum_{k=1}^{2^m-1} \frac{1}{k} =$$

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{7}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^m - 1}\right) <$$

$$< 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}}\right) =$$

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = m.$$

(Figyeljünk arra, hogy ne keveredjen össze a fentiekben a kétféle kifejezés 2^{m-1} és $2^m - 1$.)

Azt kaptuk tehát, hogy minden $m \in \mathbb{N}^+$ esetén $0 \leq \frac{H_{2^m-1}}{2^m} \leq \frac{m}{2^m}$. Jól ismert azonban, hogy ez utóbbi sorozat nullsorozat.

A feladatot ezzel bebizonyítottuk. ■

Megjegyzés. Bebizonyítható, hogy a $(H_n - \ln n)$ sorozatnak $n \to +\infty$ esetén létezik véges határértéke, ahol ln jelöli a természetes alapú logaritmust. A fenti fontos határérték az ún. *Euler-féle gamma konstans*, más néven *Euler-Mascheroni állandó*; értéke körülbelül

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) \approx 0,577216\ldots$$

Ez tehát azt jelenti, hogy nagy n-ekre

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \ln n + 0,577216\ldots \quad ■$$

M38. (b) A Cauchy-szorzat definíciója szerint $n \geq 1$ esetén

$$c_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{\sqrt{i}} \cdot \frac{(-1)^{n+1-i}}{\sqrt{n+1-i}} = (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}\sqrt{n+1-i}}.$$

Mivel $|c_n| = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}\sqrt{n+1-i}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$, így a c_n sorozat nem tart 0-hoz, tehát a $\sum_{n=1} c_n$ Cauchy-szorzat sor biztosan divergens. ■

M40. Kezdjük a megfelelő sorok konvergenciájának a vizsgálatával. Egyszerűen megmutathatjuk azt, hogy a

$$\sum_{k=1} \frac{(ax)^k}{1 - x^k} \quad \text{és a} \quad \sum_{n=1} \frac{ax^n}{1 - ax^n} \qquad (|a| \leq 1, |x| < 1)$$

sorok abszolút konvergensek. Valóban, például a bal oldali sornak az

$$\frac{1}{1 - |x|} \sum_{k=1} (ax)^k$$

egy majoráns sora, és ez utóbbi az ax ($|ax| < 1$) hányadosú konvergens geometriai sor. (Itt felhasználtuk még azt is, hogy $|x| < 1$ esetén $1 - x^k \geq 1 - |x|$ teljesül minden $k = 1, 2, \ldots$ számra.)

A folytatás már nem ilyen egyszerű. A megoldás kulcsa az, hogy az $\frac{1}{1-x^k}$ és az $\frac{1}{1-ax^n}$ törtet geometriai sor összegeként fogjuk fel:

$$\frac{1}{1-x^k} = 1 + x^k + (x^k)^2 + (x^k)^3 + \cdots \qquad (|x| < 1, k = 1, 2, \ldots),$$
$$\frac{1}{1-ax^n} = 1 + ax^n + (ax^n)^2 + (ax^n)^3 + \cdots \qquad (|a| \leq 1, |x| < 1, n = 1, 2, \ldots).$$

Ezek alapján a feladatbeli bal oldali összeget így:

$$\begin{aligned} B := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(ax)^k}{1-x^k} &= \\ = a\big(x + x^2 + x^3 + \cdots\big) + a^2\big(x^2 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + \cdots\big) &+ \\ +a^3\big(x^3 + (x^3)^2 + (x^3)^3 + \cdots\big) + \cdots &, \end{aligned} \tag{$*$}$$

a jobb oldali összeget pedig így írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} J := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ax^n}{1-ax^n} &= \\ = \big[(ax) + (ax)^2 + (ax)^3 + \cdots\big] + \big[(ax^2) + (ax^2)^2 + (ax^2)^3 + \cdots\big] &+ \\ +\big[(ax^3) + (ax^3)^2 + (ax^3)^3 + \cdots\big) + \cdots &. \end{aligned} \tag{$**$}$$

A geometriai sor összegképletét használva igazolható, hogy

$$B := \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} a^k \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} (x^k)^n\Big) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} (ax^n)^k,$$

illetve

$$J := \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} (ax^n)^k\Big) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} (ax^n)^k,$$

ezért a $B = J$ egyenlőség valóban fennáll. ■

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a $(**)$ összeg első tagját $([\cdots])$ úgy kapjuk meg, hogy $(*)$ jobb oldalán szereplő tagokban $\big(a(\cdots)\big)$ az első tagokat „összeadjuk”, azaz: $(*)$ jobb oldalán a zárójeleket elhagyjuk, majd a tagokat átrendezzük. A feladat állítását bebizonyítjuk, ha megmutatjuk azt, hogy ezek a műveletek valóban elvégezhetők. Megjegyezzük, hogy ez az állítás nem csak a fenti *geometriai sorokra*, hanem jóval általánosabban minden *abszolút konvergens sorokra* is teljesül; és éppen ezt állítja az ún. *nagy átrendezési tétel* (l. a Leindler–Schipp jegyzet 90. oldalának a tételét). ■

2. Hatványsorok

2.1. A konvergenciahalmaz meghatározása

M41. (a) **1. megoldás.** A hatványsor konvergenciasugara:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\left(\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^n}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1,$$

ezért a Cauchy–Hadamard-tétel alapján a sor konvergens, ha $|x| < R = 1$ és divergens, ha $|x| > R = 1$, ahol x komplex szám. Az $|x| = 1$ ($x \in \mathbb{C}$) esetet külön meg kell vizsgálni. Ekkor az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozat nem nullasorozat, ezért az ilyen pontokban a sor divergens. A konvergenciahalmaz tehát:

$$KH\Big(\sum_{n=1}\big(1+\frac{1}{n}\big)^n x^n\Big) = \{x \in \mathbb{C} \mid \ |x| < 1\}.$$

(a) **2. megoldás.** Legyen $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Mivel minden pozitív n-re $0 < a_n < 4$, így $0 \le \sum_{n=1} a_n|x|^n \le 4\sum_{n=1}|x|^n$. E (mértani) majoráns sor — s így az eredeti hatványsor is — biztosan konvergens, ha $|x| < 1$. Hasonlóan, mivel minden pozitív n-re $2 < a_n$, így $\sum_{n=1} a_n x^n$ biztosan divergens, ha $|x| > 1$, mert ekkor a sor tagjai nem tartanak 0-hoz. Ha pedig $|x| = 1$, akkor a sor — ugyanezen ok miatt — szintén divergens. ■

(c) A konvergenciasugárra vonatkozó képlet helyett most célszerűbb a hányadoskritériumot alkalmazni:

$$\frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{a^{(n+1)^2}} \cdot \frac{a^{n^2}}{n!|x|^n} = \frac{(n+1)|x|}{a \cdot a^{2n}} \to 0 < 1,$$

ha $n \to +\infty$, mivel $a > 1$. Ez minden $x \in \mathbb{C}$ számra igaz, ezért a hatványsor minden $x \in \mathbb{C}$ számra konvergens. ■

(d) A hatványsor konvergenciasugara:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\left(\sqrt[n]{n^p}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{n^p}\right)} = 1,$$

ezért a Cauchy–Hadamard-tétel alapján a sor konvergens, ha $|x - i| < R = 1$ és divergens, ha $|x - i| > R = 1$, ahol x komplex szám. Az $|x - i| = 1$ ($x \in \mathbb{C}$)

esetet külön meg kell vizsgálni. Ekkor a $\sum \frac{|x-i|^n}{n^p} = \sum \frac{1}{n^p}$ sor $p > 1$ miatt konvergens (l. hiperharmonikus sor). A konvergenciahalmaz tehát:

$$KH\Big(\sum_{n=1} \frac{(x-i)^n}{n^p}\Big) = \{x \in \mathbb{C} \mid \ |x-i| \leq 1\}, \quad \text{ha } p > 1.$$

Megjegyzés. A fenti megoldásból az is kiderül, hogy a sor $0 < p \leq 1$ esetén is konvergens, ha $|x-i| < 1$ és divergens, ha $|x-i| > 1$. Az i pont körüli egységnyi sugarú körív pontjaiban a konvergencia vizsgálata már bonyolultabb a $0 < p \leq 1$ esetben. Igazolható, hogy ekkor a sor konvergens, ha $|x-i| = 1$ és $x \neq 1 + i$. Ha $x = 1 + i$, akkor a sor divergens (l. hiperharmonikus sor). ■

(e) **1. megoldás.** Alkalmazzuk a hányadoskritériumot:

$$\frac{|x+5|^{2n}}{4^{n+1}(2n+1)} \cdot \frac{4^n(2n-1)}{|x+5|^{2n-2}} = \frac{|x+5|^2}{4} \cdot \frac{2n-1}{2n+1} \to \frac{|x+5|^2}{4} \qquad (n \to +\infty).$$

Ezért,

$$\text{ha } \frac{|x+5|^2}{4} < 1 \iff |x+5| < 2 \iff x \in (-7, -3),$$

akkor a sor konvergens,

$$\text{ha } \frac{|x+5|^2}{4} > 1 \iff x < -7 \text{ vagy } x > -3,$$

akkor a sor divergens.
Ha $x = -7$ vagy $x = -3$, akkor a $\sum \frac{4^{n-1}}{4^n(2n-1)} = \frac{1}{4} \sum \frac{1}{2n-1}$ sort kapjuk, és ez divergens.
A konvergenciahalmaz tehát a $(-7, -3) = k_2(-5)$ intervallum. (A hatványsor középpontja -5, konvergenciasugara 2.)

(e) **2. megoldás.** A Cauchy–Hadamard-tételt, illetve a konvergenciasugárra vonatkozó képletet is használhatjuk. A $\sum c_k(x+5)^k$ hatványsorról van szó, ahol

$$c_k = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ páratlan,} \\ \frac{1}{4^n(2n-1)}, & \text{ha } k = 2(n-1) \text{ páros.} \end{cases}$$

A $\sqrt[k]{c_k}$ $(k \in \mathbb{N})$ sorozat páratlan indexű részsorozatának 0, a páros indexű részsorozatának pedig $1/2$ a határértéke, ezért $\overline{\lim}(\sqrt[k]{c_k}) = 1/2$, ami azt jelenti, hogy a hatványsor konvergenciasugara 2. A $k_2(-5)$ intervallum végpontjaiban (azaz a -7 és a -3 pontokban a sor divergens, ezért a konvergenciahalmaz a $k_2(-5) = (-7, -3)$ intervallum.)■

M43. (a) A Cauchy–Hadamard-tételben szereplő konvergenciasugárra vonatkozó képletet közvetlenül most nehezen tudnánk alkalmazni. (A faktoriálisok n-edik gyökének aszimptotikus nagyságrendjét kellene ismernünk.) Ehelyett forduljunk a hányadoskritériumhoz. Rögzített $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, x^n$. Ekkor

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(1+n)\,|x|}{2+4n} \to \frac{|x|}{4},$$

ha $n \to +\infty$. A $\sum_{n=1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, x^n$ sor tehát $|x| < 4$ esetén konvergens, $|x| > 4$ esetén pedig divergens. Ha $x = \pm 4$, akkor

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 + \frac{1}{1+2n} > 1$$

miatt $|a_{n+1}| > |a_n|$. Az (a_n) sorozat tehát nem nullasorozat, így $\sum_{n=1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, 4^n$ és $\sum_{n=1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, (-4)^n$ is divergens. ■

(b) Mivel $n \geq 2$ esetén $3^n - \frac{3^n}{2} \leq 3^n + (-2)^n \leq 3^n + 3^n$, így $\sqrt[n]{\frac{3^n}{2}} \leq \sqrt[n]{3^n + (-2)^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 3^n}$. Mivel az egyenlőtlenség bal oldala és jobb oldala is 3-hoz tart $n \to +\infty$ esetén, ezért a közrefogási elv miatt $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n + (-2)^n} = 3$. A hatványsor konvergenciasugara $R = \frac{1}{3}$ (figyelembe véve azt is, hogy $\sqrt[n]{n} \to 1$). A hatványsor $|x| < \frac{1}{3}$ esetén konvergens, $|x| > \frac{1}{3}$ esetén divergens.

Ha $x = \frac{1}{3}$, akkor az eredeti sor nem más, mint $\sum_{n=1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\left(\frac{-2}{3}\right)^n\right)$. Mivel itt a második tagokból képzett $\sum_{n=1} \frac{1}{n}\left(\frac{-2}{3}\right)^n$ sor konvergens (hiszen $\frac{1}{n}$-et elhagyva is konvergens mértani sor), az első tagokból álló harmonikus sor viszont divergens, az eredeti sor $x = \frac{1}{3}$ esetén divergens.

Ha $x = -\frac{1}{3}$, akkor az eredeti sor egy Leibniz-típusú és egy konvergens mértani sorral majorálható sor összege, így konvergens. ■

(c) Az $x_n := \sqrt[n]{a^{\sqrt{n}}} = a^{1/\sqrt{n}}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, ezért konvergens. Az $x_{n^2} = a^{1/n}$ $(n \in \mathbb{N})$ részsorozat határértéke 1, ezért

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} a^{1/\sqrt{n}} = 1,$$

ezért az eredeti hatványsor konvergenciasugara $R = 1$, középpontja 5, tehát a sor konvergens, ha $4 < x < 6$, és divergens, ha $x < 4$ vagy $x > 6$.

Ha $x = 4$, akkor a hatványsor $\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{a^{\sqrt{n}}}$ Leibniz-típusú konvergens sor (mert alternáló; a tagok 0-hoz tartanak (mert $a > 1$, így a nevező végtelenhez tart) és a tagok abszolút értékben monoton fogynak (mert $a^{\sqrt{n}} < a^{\sqrt{n+1}}$)).

Ha $x = 6$, akkor a $\sum_{n=1} \frac{1}{a^{\sqrt{n}}}$ sort kapjuk. Megmutatjuk, hogy ez a sor konvergens. Mivel

$$\frac{1}{a^{\sqrt{n^2}}} + \frac{1}{a^{\sqrt{n^2+1}}} + \frac{1}{a^{\sqrt{n^2+2}}} + \cdots + \frac{1}{a^{\sqrt{(n+1)^2}}} \leq \frac{2n+1}{a^n},$$

továbbá a $\sum (2n+1)\left(\frac{1}{a}\right)^n$ sor $a > 1$ miatt konvergens (l. a **F10.** feladatot), ezért a $\sum_{n=1} \frac{1}{a^{\sqrt{n}}}$ sor valóban konvergens.

A hatványsor konvergenciahalmaza tehát a $[4, 6]$ intervallum. ■

M45. (a) A $\sum_{n=1} x^n$ mértani sor konvergenciahalmaza éppen $(-1, 1)$.

A $\sum_{n=1} \frac{x^n}{n}$ sor konvergenciasugara $R = 1$. A sor $x = 1$-ben nyilván divergens, $x = -1$-ben pedig konvergens (hiszen Leibniz-típusú). A sor konvergenciahalmaza tehát $[-1, 1)$.

A $\sum_{n=1} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ sor konvergenciasugara $R = 1$. A sor $x = -1$-ben nyilván divergens (hiszen akkor a harmonikus sor), $x = 1$-ben viszont konvergens (mert Leibniz-típusú). A sor konvergenciahalmaza tehát $(-1, 1]$.

A $\sum_{n=1} \frac{x^n}{n^2}$ sor konvergenciasugara $R = 1$. A sor $x = 1$-ben és $x = -1$-ben is konvergens, mert itt abszolút konvergens is (a $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$ hiperharmonikus sor konvergens). A sor konvergenciahalmaza tehát $[-1, 1]$. ■

M46. Megmutatjuk, hogy a $\sum_{n=0} (c_n + d_n)x^n$ sor konvergenciasugara 2, azaz a két sugár *minimuma.*

A $\sum_{n=0} c_n x^n$ sor konvergenciasugara 2, a $\sum_{n=0} d_n x^n$ sor konvergenciasugara 3. A Cauchy-Hadamard képlet szerint tehát $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{2}$ és $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|d_n|} = \frac{1}{3}$. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N_c \in \mathbb{N}^+$ index, hogy minden $n \geq N_c$ esetén $|c_n| \leq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^n$. Hasonlóan nyerjük, hogy van olyan $N_d \in \mathbb{N}^+$ index, hogy minden $n \geq N_d$ esetén $|d_n| \leq \left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right)^n$. Ekkor minden $n \geq N := \max(N_c, N_d)$ mellett

$$|c_n + d_n| \leq |c_n| + |d_n| \leq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^n + \left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right)^n \leq 2\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)^n.$$

Ebből következik, hogy $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n + d_n|} \leq 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)$. Mivel ε tetszőleges volt, emiatt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n + d_n|} \leq \frac{1}{2}$ is igaz.

Most megmutatjuk, hogy *tetszőleges* $0 < \varepsilon < \frac{1}{12}$ esetén $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n + d_n|} \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$ is igaz, amiből a feladat állítása már következik. Legyen tehát $0 < \varepsilon < \frac{1}{12}$ tetszőleges.

Először használjuk fel, hogy $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{2}$ miatt ehhez az ε-hoz is létezik olyan $k_n \to \infty$ (ε-tól függő) részsorozat, hogy minden n-re $\frac{1}{2} - \varepsilon \leq \sqrt[k_n]{|c_{k_n}|}$.

Általában igaz, hogy $|c_n + d_n| \geq ||c_n| - |d_n|| \geq |c_n| - |d_n|$, az előzőekben pedig már láttuk, hogy minden $n \geq N_d$ esetén $-|d_n| \geq -\left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right)^n$.

Ezek miatt a (k_n) részsorozatra áttérve igaz az alábbi alsó becslés:

$$|c_{k_n} + d_{k_n}| \geq |c_{k_n}| - |d_{k_n}| \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^{k_n} - \left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right)^{k_n},$$

ha $k_n \geq N_d$.

Most belátjuk, hogy

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^{k_n} - \left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right)^{k_n} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^{k_n},$$

ha $k_n \geq N^*$, alkalmas $N^* \in \mathbb{N}^+$ (ε-tól függő) indexre. Valóban, mivel $0 < \varepsilon < \frac{1}{12}$, így $\frac{1}{3} + \varepsilon < \frac{1}{2} - \varepsilon$, s emiatt $\frac{\frac{1}{2}-\varepsilon}{\frac{1}{3}+\varepsilon} > 1$, tehát $\left(\frac{\frac{1}{2}-\varepsilon}{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)^{k_n} \to \infty$. Következésképp van olyan N_* index, hogy $\left(\frac{\frac{1}{2}-\varepsilon}{\frac{1}{3}+\varepsilon}\right)^{k_n} \geq 2$, ha $k_n \geq N_*$. Ez azt jelenti, hogy $k_n \geq N_*$ esetén $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^{k_n} \leq -\left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right)^{k_n}$, ha $k_n \geq N_*$.

Jelölje $N^* := \max(N_d, N_*)$. Az eddigiekből megállapíthatjuk, hogy tetszőleges $0 < \varepsilon < \frac{1}{12}$ esetén van olyan (k_n) végtelenhez tartó részsorozat, hogy minden $k_n \geq N^*$ esetén

$$|c_{k_n} + d_{k_n}| \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^{k_n} - \left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right)^{k_n} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^{k_n},$$

vagyis

$$\sqrt[k_n]{|c_{k_n} + d_{k_n}|} \geq \sqrt[k_n]{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right),$$

amiből következik, hogy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k_n]{|c_{k_n} + d_{k_n}|} \geq \frac{1}{2} - \varepsilon$, azaz

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n + d_n|} \geq \frac{1}{2} - \varepsilon. \quad \blacksquare$$

2.2. Függvények hatványsorba fejtése

M47. (a) **F36**-ban a feladatot már megoldottuk. A megoldás alapgondolata az volt, hogy kiszámoltuk a $\sum_{n=0} z^n$ konvergens mértani sor önmagával vett Cauchy-szorzatát.

(b) A $\sum_{n=0} z^n$ mértani sor önmagával vett háromszoros Cauchy-szorzatát számítsuk ki. $\blacksquare$

M48. (a) Mivel $\frac{1+x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, ezért

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \text{ha } x \in (-1, 1). \ \blacksquare$$

(b) Tudjuk, hogy $x \in (-1, 1)$ esetén $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$. Ebben elvégezve az $x \mapsto -x^2$ helyettesítést kapjuk, hogy $x \in (-1, 1)$ esetén $\frac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$. Így $x \in (-1, 1)$ esetén

$$\frac{x}{1+x^2} = x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+1}. \quad \blacksquare$$

(c) Mivel minden $x \in (-1, 1)$ esetén

$$\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + (x^3)^2 + (x^3)^3 + \cdots ,$$

ezért minden $|x| < 1$ számra

$$\frac{1+x}{1-x^3} = (1+x)(1 + x^3 + x^6 + \cdots) =$$
$$= 1 + x + x^3 + x^4 + x^6 + x^7 + x^9 + x^{10} + x^{12} + x^{13} + \cdots \quad \blacksquare$$

(d) **1. megoldás.** A nevezőt szorzattá alakítjuk: $1 + x - 2x^2 = (1-x)(1+2x)$, így

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1+2x)} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2, 1\}).$$

Vegyük észre azt, hogy a tört két egyszerűbb alakú tört összegére bontható (többször segítségünkre volt már hasonló jellegű észrevétel!):

$$\frac{x}{(1-x)(1+2x)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+2x}\right). \tag{$*$}$$

(Erre a felbontásra némi „kísérletezéssel” is rájöhetünk, azonban „módszeresen” is dolgozhatunk: keresünk olyan $A, B \in \mathbb{R}$ számokat, – ha egyáltalán vannak ilyenek –, amelyekre

$$\frac{x}{(1-x)(1+2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+2x}$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 1\}$ esetén. A jobb oldalon közös nevezőre hozás után az A és a B ismeretlenekre egy lineáris egyenletrendszer adódik, aminek a megoldása $A = 1/3$ és $B = -1/3$. Ezt az eljárást a „*parciális törtekre bontás*" módszerének szokás nevezni. Később teljes általánosságban is megvizsgáljuk ezt az eljárást.)

A $(*)$-ban szereplő tagokat mértani sorba fejthetjük:

$$\frac{1/3}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3} x^n, \quad \text{ha } x \in (-1, 1),$$

illetve

$$\frac{-1/3}{1+2x} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3}(-2x)^n, \quad \text{ha } x \in (-1/2, 1/2).$$

Így minden $x \in (-1, 1) \cap (-1/2, 1/2) = (-1/2, 1/2)$ esetén

$$f(x) = \frac{x}{1 + x - 2x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3}\, x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{3}\, x^{n+1} =$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{(-2)^n}{3} \right) x^{n+1}. \quad \blacksquare$$

(d) **2. megoldás.** Az ún. *Cauchy-szorzat-módszerrel* is dolgozhatunk. Ennek alapja is az, hogy a nevezőt szorzatra bontjuk:

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1+2x)} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2, 1\}).$$

Azt is tudjuk azonban, hogy

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \text{ha } x \in (-1, 1),$$

illetve

$$\frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2x)^n, \qquad \text{ha } x \in (-1/2, 1/2),$$

továbbá mindkét sor abszolút konvergens. A két sor Cauchy-szorzata:

$$\Big(\sum_{n=0} x^n\Big) \times \Big(\sum_{n=0} (-2x)^n\Big) = \sum_{n=0} \big(\sum_{i+j=n} x^i (-2x)^j \big) =$$
$$= \sum_{n=0} \big(\sum_{i=0}^{n} (-2)^{n-i} \big) x^n = \sum_{n=0} \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} x^n.$$

Az abszolút konvergens sorok Cauchy-szorzatára vonatkozó tételünk szerint ez a sor is (abszolút) konvergens, és az összege a tényezők összegének a szorzata. Ezért

$$f(x) = x \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-(-2)^{n+1}}{3} x^{n+1}$$

minden $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (-1,1) \cap (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ esetén. ■

(e) **1. megoldás** *a Cauchy-szorzat-módszerrel:*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad \text{ha } x \in (-1,1)$$

és

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n, \qquad \text{ha } x \in (-1,1),$$

továbbá mind a két sor abszolút konvergens. A két sor Cauchy-szorzatát fogjuk képezni. Figyeljünk azonban arra, hogy a második sorban nulla együtthatók is vannak, amelyeket a Cauchy-szorzatnál figyelembe kell venni. Tehát írjuk fel az utóbbi összeget a következő alakban:

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \qquad \text{ha } x \in (-1,1),$$

ahol

$$c_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0,2,4,6,\ldots \\ 0, & \text{ha } n = 1,3,5,7,\ldots. \end{cases}$$

A két sor Cauchy-szorzata tehát

$$\Big(\sum_{n=0} c_n x^n\Big) \times \Big(\sum_{n=0} x^n\Big) = \sum_{n=0} \big(\sum_{i+j=n} c_i x^i x^j\big) =$$
$$= \sum_{n=0} \big(\sum_{i=0}^{n} c_i\big) x^n = \sum_{n=0} \alpha_n x^n.$$

A c_n együtthatók definíciója alapján minden $n = 0,1,2,\ldots$ számra

$$\alpha_{2n} = \sum_{i=0}^{2n} c_i = n+1,$$
$$\alpha_{2n+1} = \sum_{i=0}^{2n+1} c_i = n+1.$$

Az abszolút konvergens sorok Cauchy-szorzatára vonatkozó tételünkből tehát következik, hogy minden $x \in (-1,1)$ pontban fennáll az

$$f(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n = \\ = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + \cdots$$

egyenlőség. ■

(e) **2. megoldás** a *parciális törtekre bontás módszerével:*

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\Big) \cdot \frac{1}{1-x} = \\ = \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)(1-x)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\Big) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \\ = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n.$$

A fenti egyenlőségek minden $x \in (-1,1)$ számra fennállnak; az utolsóban pedig felhasználtuk az **F47.(a)** feladat állítását. Így

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n + 2(n+1)}{4} x^n \qquad (x \in (-1,1)).$$

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy itt a nevezőnek 1 kétszeres gyöke (a nevezőben az $(1-x)^2$ tényező szerepel), és a parciális törtfelbontás az $\frac{1}{(1-x)^2}$ tag mellett az $\frac{1}{1-x}$ tagot is tartalmazta. Ez általánosabban is igaz: ha a nevező tartalmazza — mondjuk — az $(1-x)^n$ tényezőt, akkor a parciális törtfelbontásban az

$$\frac{a_1}{1-x} + \frac{a_2}{(1-x)^2} + \frac{a_3}{(1-x)^3} + \cdots + \frac{a_n}{(1-x)^n}$$

tagok mindegyike előfordulhat. ■

(f) Tudjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \text{és} \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

ezért

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A koszinuszfüggvényt definiáló sorban x helyett $2x$-et írva (ezt megtehetjük!!!) azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} =$$
$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés. A feladatot persze megoldhatjuk úgy is, hogy képezzük a koszinuszfüggvényt definiáló (mindenütt abszolút konvergens) sor önmagával vett Cauchy-szorzatát, és hivatkozunk az abszolút konvergens sorok Cauchy-szorzatára vonatkozó tételünkre. (Érdemes összehasonlítani a kétféle megoldást!) Kiindulva a $\cos x = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ $(x \in \mathbb{R})$ abszolút konvergens sorfejtésből, jelölje $\sum_{n=0} c_n(x)$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos x$ sorfejtésének önmagával vett Cauchy-szorzatát. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$c_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k)!} x^{2n-2k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{(2k)!(2n-2k)!} x^{2n} =$$

$$(-1)^n x^{2n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!(2n-2k)!} = (-1)^n x^{2n} \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2n}{2k}}{(2n)!} = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}.$$

Ebből látszik, hogy $c_0(x) = 1$. Megmutatjuk, hogy ha $n \geq 1$, akkor $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}$. A binomiális-tételt alkalmazva $n \geq 1$ esetén nyerjük, hogy

$$2^{2n-1} = (1+1)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k}.$$

Ez utóbbi kifejezésben átindexelést, majd a binomiális együtthatók $\binom{m}{\ell} + \binom{m}{\ell+1} = \binom{m+1}{\ell+1}$ összegzési képletét használva

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} = \binom{2n-1}{0} + \left(\sum_{k=1}^{2n-2} \binom{2n-1}{k}\right) + \binom{2n-1}{2n-1} =$$
$$= 1 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{2n-1}{2k-1} + \binom{2n-1}{2k}\right)\right) + 1 =$$
$$= \binom{2n}{0} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k}\right) + \binom{2n}{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k},$$

ami mutatja, hogy $n \geq 1$ esetén $c_n(x) = \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$. ■

(g) Az egyszerűbb megoldás az, ha felhasználjuk a $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ $(x \in \mathbb{R})$ azonosságot, de a feladatot a sin, ill. a cos függvényt definiáló sorok Cauchy-szorzatának a kiszámolásával is megoldhatjuk.■

2.3. Egyéb feladatok

M49. Az állítások a definíciók egyszerű következményei. ■

M50. Alkalmazza az addíciós tételeket, valamint az előző feladat állításait. ■

M51. (a) Határozza meg a szinuszfüggvényt definiáló sornak és a geometriai sornak a Cauchy-szorzatát, majd alkalmazza az abszolút konvergens sorok Cauchy-szorzatára vonatkozó állítást. ■

M52. Indukcióval igazolható, hogy $a_n \le 2^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Ebből következik, hogy a $\sum_{n=0} a_n x^n$ hatványsor konvergencia sugara nem 0, ugyanis legalább 1/2. Legyen $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a Fibonacci sorozat úgynevezett generátor függvénye. Ezek után a rekurziós formulát szorozzuk meg x^n-nel, majd összegezzünk n-re:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n.$$

A bal oldalt kiegészítve a hiányzó $a_0 + a_1 x$ tagokkal; ez nem más, mint x; az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n + x.$$

Átindexezés után:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + x,$$

azaz

$$f(x) = xf(x) + x^2 f(x) + x.$$

Az f függvényre az alábbi racionális törtfüggvény előállítást kapjuk

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Innen a szokott módon (parciális törtekre bontás segítségével) kapjuk az együtthatósorozatot. Ez a sorozat, ami nem más, mint a Fibonacci sorozat, két geometriai sorozat összege. ■