Analízis 1. (BSc) vizsgatematika

Programtervező informatikus szak
2008–2009. 2. félév

A vizsgákkal kapcsolatos tudnivalók:

- A vizsgákra az ETR-ben kell jelentkezni.
- A vizsgák rendje: Mindegyik vizsga reggel 8 órakor 75 perces **írásbelivel** kezdődik. Ezen a definíciók és a tételek ismeretét ellenőrizzük. 15 kérdést kapnak, amiből legalább 8-nak a **PONTOS** megválaszolása szükséges. Ezenkívül az alább felsorolt, normál módon szedett tételek egyikét is megkapják és le kell írniuk bizonyítással együtt. Ha legfeljebb 7 kérdésre tudnak válaszolni, vagy a bizonyításos tételt nem tudják megfelelően, akkor a vizsgajegy 1-es. Ha mindkét rész sikerül, akkor a vizsgajegy 2-es vagy 3-as. Aki 3-as jegyet kap és javítani szeretne, az megteheti az írásbeli után kezdődő szóbeli vizsgán, az alábbi vastagon szedett tételek egyikét kell bizonyítania.
- Utóvizsgázni bármelyik időpontban lehet. Az ETR-ben ekkor is kell jelentkezni. Az uv is a fentiek szerint zajlik.

1. A Bernoulli-egyenlőtlenség.
2. A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség.
3. A valós számok Dedekind-féle axiómarendszere (testaxiómák, rendezési axiómák, teljességi — vagy Dedekind-féle — axióma). A természetes számok halmaza ($\mathbb{N}$). A teljes indukció elve.
4. A szuprémum elv: számhalmaz maximuma, minimuma, korlátossága, a szuprémum elv, a szuprémum definíciója, ekvivalens átfogalmazás, a teljességi axióma ekvivalens a szuprémum elvvel, infimum.
5. Az archimédészi tulajdonság és a Cantor tulajdonság.
6. Halmazok, relációk és függvények.
7. Valós sorozat fogalma. Elemi tulajdonságok. Konvergens és divergens sorozatok. Sorozat határértéke. A határérték definíciójának egyszerű következményei.
8. A rendezés és a limesz kapcsolata. Monoton sorozat határértéke.
9. Nullasorozatok. Műveletek nullasorozatokkal. Műveletek konvergens sorozatokkal.
10. Rendezés és műveletek az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazon. A műveletek és a határérték kapcsolata.
11. Minden sorozatnak van monoton részsorozata. A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel.
12. A Cauchy-féle konvergenciakritérium.
13. Pozitív szám m-edik gyökének előállítása rekurzív módon megadott sorozatok határértékével.
14. A geometriai sorozat határértéke. Az e szám bevezetése az $(1 + 1/n)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozattal.
15. Az $(\sqrt[n]{a}, n \in \mathbb{N})$, $(\sqrt[n]{n}, n \in \mathbb{N})$, $(n^k q^n, n \in \mathbb{N})$, $(a^n/n!, n \in \mathbb{N})$, $(n!/n^n, n \in \mathbb{N})$ sorozat határértéke.

16. Végtelen sor fogalma, konvergenciája, összege. A Cauchy-féle konvergenciakritérium. A konvergencia egy szükséges feltétele.
17. Nevezetes sorok: a geometriai sor, a teleszkópikus sor, a $\sum \frac{1}{n^2}$ sor, a harmonikus sor.
18. Az e-re vonatkozó $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ előállítás. Az e irracionális szám. $2,6 < e < 2,8$.
19. Pozitív tagú sorok konvergenciája. Az összehasonlító kritérium.
20. A gyök- és a hányadoskritérium.
21. Leibniz-típusú sorok értelmezése, konvergenciája, hibabecslés. A $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ sor.
22. Abszolút konvergens sorok.
23. Tizedes törtek.
24. Végtelen sorok átrendezése.
25. Végtelen sorok zárójelezése.
26. Végtelen sorok szorzása.
27. Abszolút konvergens sorok szorzása. Mertens tétel.
28. Függvénysorozatok és függvénysorok, konvergenciahalmaz, határfüggvény, összegfüggvény. Hatványsorok. Definíció, példák.
29. A Cauchy–Hadamard-tételek. Analitikus függvények.
30. Nevezetes hatványsorok: az exp, sin, cos, sh, ch értelmezése és alaptulajdonságaik.
31. Torlódási pont fogalma. Példák. Függvény határértéke. A határérték egyértelmű. Speciális esetek.
32. Az átviteli elv. A közrefogási elv. A műveletek és a határérték kapcsolata. Egyoldali határértékek.
33. Nevezetes határértékek: hatványfüggvények, reciprok függvények, polinomok, racionális törtfüggvények, analitikus függvények, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, monoton függvények.
34. Folytonosság, szakadás. A folytonosság és a határérték kapcsolata. A folytonosságra vonatkozó átviteli elv. Műveletek folytonos függvényekkel (alapműveletek, kompozíció). Monoton függvény szakadási helyei.
35. Korlátos zárt intervallumon értelmezett függvény korlátos is. A Weierstrass-tétel.
36. Bolzano tétele és következménye.