

Analízis 1. (BSc) vizsgakérdések
Programtervező informatikus szak
2008-2009. tanév 2. félév

• **Valós számok**

1. Hogyan szól a Bernoulli-egyenlőtlenség? Mikor van egyenlőség?
2. Fogalmazza meg a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget. Mikor van egyenlőség?
3. Írja le a valós számok közötti rendezés és a műveletek kapcsolatára vonatkozó axiómákat.
4. Mit mond ki a *teljességi axióma*?
5. Fogalmazza meg a szuprémum elvet.
6. Mit jelent az, hogy a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz induktív?
7. Hogyan értelmezi a természetes számok halmazát?
8. Fogalmazza meg a teljes indukció elvét!
9. Mikor van egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaznak maximuma (minimuma)?
10. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy a $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaznak **nincs** minimuma.
11. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy a $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaznak **nincs** maximuma.
12. Mikor felülről (alulról) korlátos egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz?
13. Fogalmazza meg pozitív állítás formájában azt, hogy egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről **nem** korlátos!
14. Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Mit jelent az A elemeire nézve az, hogy $\xi = \sup A$?
15. Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Mit jelent az A elemeire nézve az, hogy $\xi = \inf A$?
16. Mit jelent az, hogy a valós számok halmaza rendelkezik az archimédeszi tulajdonsággal?
17. Mit jelent az, hogy a valós számok halmaza rendelkezik a Cantor-tulajdonsággal?

• **Relációk és függvények**

18. Definiálja a következő fogalmakat: *reláció, reláció értelmezési tartománya és értékkészlete.*
19. Adja meg a *függvény* definícióját.
20. Hogyan értelmezzük halmaz függvény által létesített *képét*?

21. Hogyan értelmezzük halmaz függvény által létesített *ősképét*?
22. Mikor nevezünk egy függvényt *invertálhatónak*?
23. Definiálja az inverz függvényt.
24. Mi a *bijekció* definíciója?
25. Írja le az *összetett függvény* fogalmát.

• **Sorozatok**

26. Definiálja a következő fogalmakat: *valós sorozat*; sorozat n -edik *tagja*, *index*.
27. Mit jelent az, hogy egy $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat korlátos?
28. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy az (a_n) sorozat *nem* korlátos.
29. Mit jelent az, hogy egy (a_n) számsorozat *indexsorozat*?
30. Egy (a_n) sorozatról mikor mondjuk, hogy a (b_n) sorozat *részsorozata*?
31. Mit ért egy sorozat *részsorozatán*?
32. Mi a definíciója annak, hogy egy valós számsorozatnak van *csúcsa*?
33. Definiálja az $A \in \overline{\mathbb{R}}$ elem $\varepsilon > 0$ *sugarú környezetét*.
34. Mikor nevezünk egy (a_n) valós sorozatot *konvergensnek*?
35. Mit jelent az, hogy az (a_n) sorozat *divergens*?
36. Tegyük fel, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám. Igaz-e az, hogy

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall \varepsilon > 0\text{-ra és } \forall n \geq n_0\text{-ra } |a_n - A| < \varepsilon?$$

(Válaszát indokolja!)

37. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}$ szám minden környezete az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagját tartalmazza. Következik-e ebből az, hogy az (a_n) sorozat *konvergens*?
38. Mit jelent az, hogy az (a_n) sorozat $(+\infty)$ -hez tart?
39. Mi a definíciója annak, hogy az (a_n) sorozatnak $-\infty$ a határértéke?
40. Mit jelent az, hogy az (a_n) sorozatnak *van határértéke*?
41. Adott $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén mi a definíciója a $\lim(a_n) = A$ egyenlőségnek?
42. Fogalmazza meg a sorozatok konvergenciájára vonatkozó *szükséges feltételt*.
43. Fogalmazza meg a sorozatokra vonatkozó *közrefogási elvet*.

44. Milyen állításokat ismer a határérték és a rendezés között?
45. Igaz-e az, hogy ha az (a_n) és a (b_n) sorozatoknak van határértéke és $a_n > b_n$ minden n -re, akkor $\lim(a_n) > \lim(b_n)$?
46. Mondja ki a monoton sorozatok konvergenciájára és határértékére vonatkozó állításokat.
47. Milyen műveleti tételeket ismer konvergens sorozatokra?
48. Igaz-e az, hogy ha (a_n) konvergens és (b_n) divergens, akkor $(a_n + b_n)$ is divergens.
49. Fogalmazza meg sorozatok összegének határértékére vonatkozó állítást.
50. Táblázattal szemléltesse a sorozatok szorzatának a határértékére vonatkozó állítást.
51. Fogalmazza meg a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételt.
52. Definiálja a Cauchy-sorozatot.
53. Fogalmazza meg pozitív állítás formájában azt, hogy egy $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat **nem** Cauchy-sorozat!
54. Fogalmazza meg a sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériumot.
55. Hogyan értelmeztük az ϵ számot?
56. Milyen állítást ismer a (q^n) mértani sorozat határértékével kapcsolatosan?
57. Fogalmazza meg egy valós szám m -edik gyökének a létezésére vonatkozó tételt.
58. Legyen $A > 0, 1 < m \in \mathbb{N}$. Melyik az a sorozat, amelynek határértéke $\sqrt[m]{A}$?

• **Végtelen sorok**

59. Mi a végtelen sor definíciója?
60. Mit jelent az, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor *konvergens*, és hogyan értelmezzük az *összegét*?
61. Milyen tételt ismer $q \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ geometriai sor konvergenciájáról?
62. Mi a *teleszkópikus sor* és mi az összege?
63. Fogalmazza meg a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériumot.
64. Ismer-e sorok konvergenciájára vonatkozó szükséges feltételt?
65. Igaz-e az, hogy ha $\lim(a_n) = 0$, akkor a $\sum a_n$ sor konvergens?
66. Fogalmazza meg a nem-negatív tagú sorok konvergenciájára vonatkozó tételt!
67. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *összehasonlító kritériumot*.

68. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *gyökkritériumot*.
69. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *hányadoskritériumot*.
70. Mik a Leibniz-típusú sorok és milyen konvergenciatételt ismer ezekkel kapcsolatban?
71. Adjon meg egy olyan végtelen sort, amelyik konvergens, de nem abszolút konvergens.
72. Adjon meg egy olyan végtelen sort, amelyiknek az összege az e szám.
73. Mondja ki a tizedestörtekről a tételket!
74. Mit nevez egy számsor zárójelezett sorának?
75. Hogyan szólnak a végtelen sorok zárójelezésére vonatkozó tételek?
76. Mit nevez egy végtelen sor átrendezésének?
77. Fogalmazza meg a *feltételesen konvergens* sorok átrendezésére vonatkozó Riemann-tételt.
78. Milyen állítást ismer *abszolút konvergens* sorok átrendezésével kapcsolatban?
79. Definiálja a $\sum_{n=0} a_n, \sum_{n=0} b_n$ sorok *téglányszorzatát*.
80. Definiálja a $\sum_{n=0} a_n, \sum_{n=0} b_n$ sorok *Cauchy-szorzatát*.
81. Adjon meg olyan végtelen sorokat, amelyek Cauchy-szorzata divergens.
82. Fogalmazza meg az *abszolút konvergens* sorok szorzatára vonatkozó *Cauchy-tételt*.
83. Fogalmazza meg a *Mertens-tételt*.
- **Hatványsorok, elemi függvények**
84. Írja le a *hatványsor* definícióját.
85. Fogalmazza meg a *hatványsorok konvergencia sugaráról az általánosított Cauchy-Hadamard-tételt*.
86. Fogalmazza meg a *Cauchy-Hadamard-tételt*.
87. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $(-1, 1)$ intervallum.
88. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $(-1, 1]$ intervallum.
89. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $[-1, 1)$ intervallum.

90. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $[-1, 1]$ intervallum.
91. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyik csak az $a = 2$ pontban konvergens.
92. Definiálja az \exp függvényt.
93. Definiálja a \sin függvényt.
94. Definiálja a \cos függvényt.
95. Írja fel $\sin(x + y)$ -t $\sin x$, $\cos x$, $\sin y$, $\cos y$ segítségével.

• **Függvény határértéke**

96. Mit jelent az, hogy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja a $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak?
97. Mivel egyenlő az \mathbb{R}' , a \mathbb{Q}' és az $(\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\})'$ halmaz?
98. Adott $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}'_f$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén mi a definíciója a $\lim_a f = A$ egyenlőségnek?
99. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett véges* határérték definícióját.
100. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett plusz végtelen* határérték definícióját.
101. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett mínusz végtelen* határérték definícióját.
102. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett véges* határérték definícióját.
103. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *mínusz végtelenben vett véges* határérték definícióját.
104. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett plusz végtelen* határérték definícióját.
105. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett mínusz végtelen* határérték definícióját.
106. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *mínusz végtelenben vett plusz végtelen* határérték definícióját.
107. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *mínusz végtelenben vett mínusz végtelen* határérték definícióját.
108. Írja le a határértékre vonatkozó átviteli elvet.
109. Mit tud mondani a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről?
110. Mit lehet mondani monoton *növekedő* függvény határértékéről?

111. Mit lehet mondani monoton *csökkenő* függvény határértékéről?

• **Függvények folytonossága**

112. Definiálja egy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontbeli folytonosságát.

113. Mi a kapcsolat a pontbeli folytonosság és a határérték között?

114. Milyen tételt ismer hatványsor összegfüggvényének a folytonosságáról?

115. Hogyan szól a folytonosságra vonatkozó átviteli elv?

116. Fogalmazza meg a hányadosfüggvény folytonosságára vonatkozó tételt.

117. Milyen tételt ismer az összetett függvény pontbeli folytonosságáról?

118. Definiálja a *megszüntethető szakadási hely* fogalmát.

119. Definiálja az *elsőfajú szakadási hely* fogalmát.

120. Mit tud mondani *monoton* függvény szakadási helyeiről?

121. Mit tud mondani a korlátos és zárt $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon folytonos függvény értékkészletéről?

122. Hogyan szól a *Weierstrass-tétel*?

123. Mit mond ki a *Bolzano-tétel*?