ANALÍZIS I. TÉTELBIZONYÍTÁSOK ÍRÁSBELI VIZSGÁRA

Szerkesztette: *Balogh Tamás*

2012. június 27.

Ha hibát találsz, kérlek jelezd a *info@baloghtamas.hu* e-mail címen!

1. A Bernoulli-egyenlőtlenség és a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenség.

Bernoulli-egyenlőtlenség:

Tétel:

Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$ és $-1 \leq h \in \mathbb{R}$

Ekkor: $(1+h)^n \geq 1+n*h$ és $" = " \Leftrightarrow n = 1 \vee h = 0$

Bizonyítás:

Teljes indukció(n-re):

1. $n=1$-re $\wedge\ h \geq -1 \in \mathbb{R}$-re $\Rightarrow (1+h)^1 \geq 1+1*h \Leftrightarrow 1+h \geq 1+h \quad \checkmark$
2. *Indukciós feltevés*: Tfh. valamely n-re igaz: $(1+h)^n \geq 1+n*h$
3. Kell, hogy $n+1$-re is igaz legyen: $(1+h)^{n+1} \geq 1+(n+1)*h$

   Ugyanis $(1+h)^{n+1} = (1+h)^n*(1+h) \underset{\substack{1+h\geq 0\\ ind.felt.miatt}}{\geq} (1+n*h)*(1+h) =$

   $1+nh+h+nh^2 =$

   $= 1+(n+1)h+nh^2 \underset{nh^2\geq 0}{\geq} 1+(n+1)h \quad \checkmark \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq n$-re igaz.

Egyenlőség esete:

$" \Leftarrow "$ Ha $h=0$ vagy $n=1$, akkor nyilván $(1+h)^n = 1+nh$

$" \Rightarrow "$ Tegyük fel, hogy $(1+h)^n = 1+nh$ valamilyen $n \in \mathbb{N}$ és $h \in [-1,+\infty)$ esetén. Tegyük még fel azt is, hogy $n \geq 2$. Azt kell igazolnunk, hogy ekkor h csak 0-val lehet egyenlő.

Mivel $(1+h)^n = 1+nh \Leftrightarrow h((1+h)^{n-1}+(1+h)^{n-2}+\cdots+1) = hn$, ezért $h>0$ nem lehet, mert ekkor $(1+h)^{n-1}+(1+h)^{n-2}+\cdots+1 > n$.

Viszont $h<0$ sem lehet, mert ebben az eseteben

$0 \leq (1+h)^{n-1}+(1+h)^{n-2}+\cdots+1 < n \qquad \square.$

Számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség:

Tétel:

Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq x_1 \ldots x_n \in \mathbb{R}$

Ekkor $x_1x_2...x_n \leq (\frac{x_1+x_2...+x_n}{n})^n$ és $" = " \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

Bizonyítás:

Teljes indukció n-re és Bernoulli egyenlőtlenség:

1, $n=1 \Rightarrow 0 \leq x_1 \in \mathbb{R}: \quad x_1 \leq (\frac{x_1}{1})^1 = x_1 \quad \checkmark$

1b, $n=2 \Rightarrow 0 \leq x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

kell: $x_1x_2 \leq (\frac{x_1+x_2}{2})^2 \Leftrightarrow 4x_1x_2 \leq x_1^2+2x_1x_2+x_2^2 \Leftrightarrow 0 \leq x_1^2-2x_1x_2+x_2^2 \Leftrightarrow 0 \leq (x_1-x_2)^2 \quad \checkmark$ Sőt, itt $" = " \Leftrightarrow x_1-x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

2, Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ mellett $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ esetén teljesül az egyenlőtlenség: $x_1x_2...x_n \leq (\frac{x_1+x_2...+x_n}{n})^n$

Jelölés: $P_n := x_1x_2\ldots x_n$, $S_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ Ekkor: $P_n \leq S_n^n$

Kell: $n+1$-re, azaz $\forall 0 \leq x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ számra: $P_{n+1} \leq S_{n+1}^{n+1}$

Bizonyítása: $S_{n+1}^{n+1} = (\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}}{n+1})^{n+1} = (\frac{n*S_n+x_{n+1}}{n+1})^{n+1} = (\frac{n*S_n+S_n-S_n+x_{n+1}}{n+1})^{n+1} =$ $(S_n+\frac{x_{n+1}-S_n}{n+1})^{n+1} \underset{S_n\neq 0}{=} S_n^{n+1}(1+\underbrace{\frac{x_{n+1}-S_n}{(n+1)*S_n}}_{=h})^{n+1} \underset{Bernoulli}{\geq} S_n^{n+1}(1+(n+1)\frac{x_{n+1}-S_n}{(n+1)S_n}) =$

$S_n^{n+1}(1+\frac{x_n+1}{S_n}-1) = S_n^{n+1}\frac{x_n+1}{S_n} = S_n^n x_{n+1} \underset{\substack{\text{ind feltevés miatt}\\ x_{n+1}\geq 0}}{\geq} P_n x_{n+1} = x_1x_2\ldots x_n x_{n+1} =$

P_{n+1}

Kell még: Ha $S_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$

illetve $h = \frac{x_{n+1}-S_n}{(n+1)S_n} \geq -1 \quad |/(n+1S_n)$
$x_{n+1} - S_n \geq -nS_n - S_n \Rightarrow x_{n+1} + nS_n \geq 0$ és ez igaz.
" = " bizonyítása: Ha $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ akkor a két oldal egyenlő ezért az állítása igaz. Tegyük most fel, hogy az x_k számok nem mind egyenlőek egymással. Jelölje x_1 a legkisebb, x_2 pedig a legynagyobb számot az x_k számok között. Legyen továbbá:
$S_n := \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$. Ekkor $x_1 < S_n < x_2$. Írjuk most x_1 helyébe S_n-et, x_2 helyébe pedig $(x_1 + x_2 - S_n)$-et. Az így kapott

$$S_n, x_1 + x_2 - S_n, x_3, x_4, \ldots, x_n$$

számok számtani közepe nyilván S_n, és a mértani közepükre az

$$S_n(x_1 + x_2 - S_n) - x_1x_2 = (S_n - x_1)(x_2 - S_n) > 0$$

miatt az

$$\sqrt[n]{S_n(x_1 + x_2 - S_n)x_3x_4 \ldots x_n} > \sqrt[n]{x_1x_2x_3 \ldots x_n}$$

egyenlőtlenség teljesül. Ez azt jelenti, hogy a számtani közép változatlan maradt, a mértani közép pedig növekedett. Ha a

$$S_n, x_1 + x_2 - S_n, x_3, x_4, \ldots, x_n$$

alatti számok nem mind egyenlők egymással, akkor folytatjuk az elárást. Végül legfeljebb $n-1$ lépésben mindegyik számS_n lesz. A számtani közép nem változott, a mértani mindigg nőtt, most egyenlőség lett, tehár eredetileg a mértani közép kisebb volt, mint a számtani közép $\square$.

2. A teljes indukció elve és a szuprémum elv.

Teljes indukció elve:

Tétel:

Legyen A_n egy állítás.
$\forall n \in \mathbb{N}$
Tfh.: A_0 igaz
Ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is igaz $\quad n \in \mathbb{N}$
Ekkor A_n igaz $\forall n \in \mathbb{N}$-re

Bizonyítás:

Legyen $S = \{n \in \mathbb{N} : A_n \text{ igaz }\} = S \subseteq \mathbb{N}$
S induktív halmaz, hiszen $0 \in S$, mert A_0 igaz, ha $n \in S$,
akkor $A(n)$ igaz $\Rightarrow A_{(n+1)}$ igaz $\Rightarrow n+1 \in S \Rightarrow S$ induktív
$\mathbb{N}$ a legkisebb induktív halmaz $\Rightarrow \mathbb{N} \subset S \Rightarrow S = \mathbb{N} \Rightarrow A_n$ igaz $\forall n \in \mathbb{N}$-re. $\square$.

Szuprémum elv:

Tétel:

$\emptyset \neq H \subseteq \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz felső korlátai között van legkisebb.

Bizonyítás:

$\emptyset \neq H = A,\ B := \{k \in \mathbb{R} : k \text{ felső korlátja } A\text{-nak}\} \Rightarrow \forall a \in A\ \ \forall k \in B : \quad a \leq k$
$A \neq \emptyset,\ B \neq \emptyset$, mert felülről korlátos $\Rightarrow$ teljességi axióma alapján $\exists \xi \in \mathbb{R}$
$\forall a \in A,\ \ \forall k \in B : \quad a \leq \xi \leq k \Rightarrow a \leq \xi \quad \forall a \in A$-ra $\Rightarrow \xi$ felső korlát, és ξ a legkisebb felső korlát, mert ha k felső korlát és $\xi \leq k \Rightarrow \xi$ a legkisebb felső korlát $\square$.

3. Az arkhimédeszi tulajdonság.

Tétel:

$\forall a \in \mathbb{R},\ a > 0 \quad \forall b \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : \quad b < na$

Bizonyítás:

Indirekt:

Tfh. $\exists a \in \mathbb{R},\ a > 0 : \exists b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} : b \geq na$

$H = \{na : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow H$ felülről korlátos, hiszen $na \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \xi = \sup H \Rightarrow$

$\Rightarrow \xi$ a legkisebb felső korlát $\Rightarrow \xi - a$ nem felső korlát $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : na > \xi - a \Rightarrow$

$\Rightarrow (n+1)a > \xi$ ↯ hiszen $(n+1)a \leq \xi$ mert ξ felső korlátja a H halmaznak. $\square$.

4. A Cantor tulajdonság.

Tétel:

Legyen $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ korlátos zárt intervallum

Ha $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$-re, akkor $\cap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$

Bizonyítás:

Legyen $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $B := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$

Ekkor $a_n \leq b_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$, hiszen:

- $n \leq m : \ a_n \leq a_m \leq b_m$
- $n > m \ a_n \leq b_n \leq b_m$

Teljességi axióma miatt $\exists \xi \in \mathbb{R} : \ a_n \leq \xi \leq b_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \leq \xi \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\xi \in [a_n, b_n] \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \xi \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \qquad \square$.

5. Sorozat határértékének egyértelműsége.

Tétel:

Az (a_n) sorozatnak $\exists$ határértéke, ha $\exists A \in \bar{\mathbb{R}},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 : \ a_n \in K_\varepsilon(A)$

Az elöző A szám az (a_n) sorozat határértéke, és ez a szám egyértelmű.

Bizonyítás:

Indirekt: Tegyük, fel, hogy A_1 és A_2 is kielégití a definíciót.

Legyen $\varepsilon \leq \frac{|A_1 - A_2|}{2} \Rightarrow K_\varepsilon(A_1) \cap K_\varepsilon(A_2) = \emptyset$

$\lim a_n = A_1 \Rightarrow \varepsilon$-hoz $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_1 : a_n \in K_\varepsilon(A_1)$

$\lim a_n = A_2 \Rightarrow \varepsilon$-hoz $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_2 : a_n \in K_\varepsilon(A_2)$

Legyen $n_0 = \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow \varepsilon$-hoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_0$:

$a_n \in K_\varepsilon(A_1) \cap K_\varepsilon(A_2) = \emptyset$ ↯ $\qquad \square$

6. A rendőrelv.

Tétel:

$(a_n), (b_n), (c_n)$ sorozatok. Tegyük fel, hogy:

$\exists\, N \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq N \quad a_n \leq b_n \leq c_n$ ha $\exists \lim a_n = \lim c_n$, akkor $\exists \lim b_n = \lim a_n$

Bizonyítás:

Legyen $A = \lim a_n = \lim c_n$

1, $A \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_1 \in \mathbb{N}\; \forall\, n \geq n_1 : a_n \in K_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$
$A \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_2 \in \mathbb{N}\; \forall\, n \geq n_2 : c_n \in K_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$
Legyen $n_0 = \max\{n_1, n_2, N\} \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_0 : A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq$
$\leq c_n < A + \varepsilon \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_0 \quad b_n \in K_\varepsilon(A) \Rightarrow \lim b_n = A$

2, $A = \infty \Rightarrow \forall\, P \in \mathbb{R}\;\; \exists\, n_1 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_1\;\; a_n > P$
Legyen $n_0 = \max\{n_1, N\} \Rightarrow \forall\, P \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_0 : b_n \geq a_n > P \Rightarrow$
$\lim b_n = \infty$

3, $A = -\infty \Rightarrow \forall\, P \in \mathbb{R}\;\; \exists\, n_1 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_1\;\; c_n < P$
Legyen $n_0 = \max\{n_1, N\} \Rightarrow \forall\, P \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_0 : b_n \leq c_n < P \Rightarrow$
$\lim b_n = -\infty \qquad \square.$

7. Mit lehet mondani két sorozat tagjairól, ha az egyik határértéke nagyobb mint a másiké?

Tétel:

$(a_n), (b_n)$ sorozatok, $\exists\, A = \lim a_n$, $\exists\, B = \lim b_n$

$A > B \Rightarrow \exists\, N, \forall\, n \geq N : a_n > b_n$

Bizonyítás:

a, $A, B \in \mathbb{R}$
Legyen $\varepsilon \leq \frac{A-B}{2} \Rightarrow K_\varepsilon(B) \cap K_\varepsilon(A) = \emptyset$
$\lim a_n = A \Rightarrow \varepsilon > 0\; \exists\, n_1 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_1 : a_n \in K_\varepsilon(A)$
$\lim b_n = B \Rightarrow \varepsilon > 0\; \exists\, n_2 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_2 : b_n \in K_\varepsilon(B)$
Legyen $N = \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq N : b_n < B + \varepsilon \leq A - \varepsilon < a_n$

b, $A = \infty, B \in \mathbb{R}$
Tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\; \forall\, n \geq n_0 : b_n \in K_\varepsilon(B)$
$P = B + \varepsilon$-hoz $\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_1 : a_n > P \Rightarrow \exists\, N = \max\{n_0, n_1\}, \forall\, n \geq N :$
$b_n < B + \varepsilon = P < a_n$

c, $A = \infty, B = -\infty$
Tetszőleges $P \in \mathbb{R}$:

$$\exists\, n_1, \forall\, n \geq n_1 : b_n < P$$

$$\exists\, n_2, \forall\, n \geq n_2 : a_n > P$$

$\Rightarrow \exists\, N = \max\{n_1, n_2\}, \forall\, n \geq N : b_n < P < a_n$

d, $A \in \mathbb{R}, B = -\infty$
Tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\; \forall\, n \geq n_0 : a_n \in K_\varepsilon(A)$
$P = A - \varepsilon$-hoz $\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_1 : b_n < P \Rightarrow \exists\, N = \max\{n_0, n_1\}, \forall\, n \geq N :$
$b_n < A - \varepsilon = P < a_n \qquad \square.$

8. Műveletek nullasorozatokkal.

Tétel:

Tegyük fel, hogy $(a_n), (b_n)$ is nullsorozat.

Ekkor

i, $(a_n + b_n)$ is nullsorozat.

ii, Ha (c_n) korlátos, akkor $(a_n c_n)$ is nullsorozat.

iii, $(a_n b_n)$ is nullsorozat.

Bizonyítás:

i, $\lim a_n = 0, \lim b_n = 0 \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_1, \forall n \geq n_1 : |a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_2, \forall n \geq n_2 : |b_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 = \max\{n_1, n_2\}, \forall n \geq n_0 : |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim(a_n + b_n) = 0$

ii, (c_n) korlátos $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : |c_n| \leq K$

$\lim a_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0, \forall n \geq n_0 \ |a_n| < \varepsilon/K \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0, \forall n \geq n_0 :$ $|a_n c_n| < \dfrac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon \Rightarrow \lim(a_n c_n) = 0$

iii, (b_n) nullsorozat $\Rightarrow (b_n)$ korlátos. Lásd ii, pontot! $\square$.

9. Monoton növő sorozat határértéke (véges és végtelen eset).

Tétel:

Ha (a_n) monoton nő és felülről korlátos, akkor konvergens is, és $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Ha (a_n) monoton nő és nem felülről korlátos, akkor $\lim a_n = \infty$

Bizonyítás:

(a_n) felülről korlátos$\Rightarrow \exists \xi = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq \xi$ és $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : \xi - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \xi \Rightarrow \lim a_n = \xi$.

(a_n) nem felülről korlátos $\Rightarrow \forall K \in \mathbb{R} \, \exists n_0 : \ a_{n_0} > K \Rightarrow \forall K \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \geq n_0 :$ $K < a_{n_0} < a_n \Rightarrow \lim a_n = \infty$ $\square$.

10. A geometriai sorozat határértéke. Az e szám bevezetése az $(1+1/n)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozattal.

Geometria sorozat:

Tétel:

$$\lim q^n = \begin{cases} 0, & ha\ |q| < 1 \\ 1, & ha\ q = 1 \\ \infty, & ha\ q > 1 \\ \nexists, & ha\ q \le -1 \end{cases}$$

Bizonyítás:

i, $q > 1$ $\quad q = 1 + h$, ahol $h > 0$
$q^n = (1+h)^n \ge 1 \underset{\to\infty}{+} nh$(Bernoulli)$\Rightarrow \lim q^n = \infty$

ii, $q = 1$ ✓

iii, $|q| < 1$ Ha $q = 0$ ✓
Legyen $|q| < 1$, $q \ne 0$
Ekkor $\frac{1}{|q|} > 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} = 1 + h,\ h > 0$
$(\frac{1}{|q|})^n = (1+h)^n \ge 1 + nh > nh$
$0 < |q|^n < \frac{1}{nh} \to 0 \underset{rendorelv}{\Rightarrow} \lim q^n = 0$

iv, $q = -1$, $(-1)^n$ divergens

v, $q < -1 \Rightarrow |q| > 1 \Rightarrow \lim |q|^n = \infty \Rightarrow \lim q^{2n} = \infty$ és $\lim q^{2n+1} = -\infty \Rightarrow$ $\nexists \lim q^n$ $\quad \square$.

Az e szám bevezetése:

Tétel:

Az $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ sorozat korlátos, és monoton nő, ezért konvergens és
$e := \lim(1+\frac{1}{n})^n \sim 2,71$

Bizonyítás:

Az (a_n) sorozat monoton növekedésének bizonyításához felhasználjuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:
$a_n = (1+\frac{1}{n})^n = 1 * \underbrace{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})\dots(1+\frac{1}{n})}_{n-szer} \le \left(\frac{1+n(1+\frac{1}{n})}{n+1}\right)^{n+1} = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} =$ a_{n+1}

Az (a_n) sorozat korlátosságának bizonyításához felhasználjuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:
$\frac{1}{4}(1+\frac{1}{n})^n = \frac{1}{2}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})^n \le (\frac{2 * \frac{1}{2} + n(1+\frac{1}{n})}{n+2})^{n+2} = 1$

Ebből következik, hogy $a_n \le 4$ $\quad (n \in \mathbb{N})$ ezért a sorozat felülről korlátos. A monoton növekedés miatt nyilván alulról is korlátos $\quad \square$.

11. Az $(\sqrt[n]{a}, n \in \mathbb{N})$, $(\sqrt[n]{n}, n \in \mathbb{N})$, $(n^k q^n, n \in \mathbb{N})$, $(a^n/n!, n \in \mathbb{N})$, $(n!/n^n, n \in \mathbb{N})$ sorozat határértéke.

$\sqrt[n]{a}, n \in \mathbb{N}$**:**

Tétel:

$a > 0$ esetén $\lim \sqrt[n]{a} = 1$

Bizonyítás:

i, $a > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = 1 + h_n,\ h_n > 0$

$a = (\sqrt[n]{a})^n = (1+h_n)^n \underset{Bern.}{\geq} 1 + nh_n$

$\underset{\to 0}{\frac{a-1}{n}} \geq h_n > \underset{\to 0}{0} \Rightarrow \lim h_n = 0 \Rightarrow \lim(\sqrt[n]{a} - 1) = 0 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a} = 1$

ii, $a = 1$ ✓

iii, $0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1 \Rightarrow \lim \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a} = 1$ $\square$.

$\sqrt[n]{n}, n \in \mathbb{N}$**:**

Tétel:

$\lim \sqrt[n]{n} = 1$

Bizonyítás:

$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n,\ h_n > 0$

$n = (\sqrt[n]{n})^n = (1+h_n)^n \geq \binom{n}{2} h_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$

$\underset{\to 0}{\frac{2}{n-1}} \geq h_n^2 > \underset{\to 0}{0} \Rightarrow \lim h_n^2 = 0 \Rightarrow \lim h_n = 0 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{n} = 1$ $\square$.

$n^k q^n, n \in \mathbb{N}$**:**

Tétel:

$k \in \mathbb{N}\ |q| < 1$ rögzített: $\lim n^k q^n = 0$

Bizonyítás:

$\frac{1}{|q|} > 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} = 1 + h \Rightarrow (\frac{1}{|q|})^n = (1+h)^n \geq \binom{n}{k+1} h^{k+1} \quad (n > k) =$

$$= \frac{n!}{(k+1)!(n-k+1)!} h^{k+1} = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}(n-k)\dots n$$

$$0 \leq n^k |q|^n \leq \frac{(k+1)!}{h^{k+1}} \frac{n^k}{(n-k)(n-k+1)\dots n} = \frac{(k+1)!}{h^{k+1}} \frac{n^k}{n^{k+1}(1-\frac{k}{n})(1-\frac{k-1}{n})\dots 1} =$$

$$= \underbrace{\frac{(k+1)!}{h^{k+1}}}_{\text{konstants}} \underbrace{\frac{1}{(1-\frac{k}{n})(1-\frac{k-1}{n}\dots 1)}}_{\to 1} * \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \to 0 \Rightarrow \lim n^k q^n = 0 \qquad \square.$$

$(a^n/n!, n \in \mathbb{N}$**:**

Tétel:

$a \in \mathbb{R}$ rögzített $\Rightarrow \lim \frac{a^n}{n!} = 0$

Bizonyítás:

Legyen $n_0 \geq |a|$

$$\frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|}{1}\frac{|a|}{2}\dots\frac{|a|}{n_0}\frac{|a|}{n_0+1}\dots\frac{|a|}{n-1}\frac{|a|}{n} < \underbrace{\frac{|a|}{1}\frac{|a|}{2}\dots\frac{|a|}{n_0}}_{=c} * \frac{|a|}{n} = c * \frac{|a|}{n} \to 0 \Rightarrow \lim \frac{a^n}{n!} =$$

0 $\square$.

$n!/n^n, n \in \mathbb{N}$**:**

Tétel:

$\lim \frac{n!}{n^n} = 0$

Bizonyítás:

$0 < \dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1}{n}\dfrac{2}{n}\dfrac{3}{n}\dots\dfrac{n-1}{n}\dfrac{n}{n} < \dfrac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \lim \dfrac{n!}{n^n} = 0 \qquad \square.$

12. Nevezetes sorok: a geometria sor, a teleszkópikus sor, a $\sum \dfrac{1}{n^2}$ sor, a harmonikus sor.

Geometriai sor:

Tétel:

$\sum\limits_{n=0} q^n$ sor konvergens $\Leftrightarrow |q| < 1$. Ekkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Bizonyítás:

$$s_n = q^0 + q^1 + \dots q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}$$

$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n)$

Legyen $a = 1, b = q$.

$(1 - q^{n+1})$ sorozat konvergens $\Leftrightarrow |q| < 1$ Ekkor $\lim s_n = \lim \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \qquad \square.$

Teleszkópikus sor:

Tétel:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ sorozat konvergens.

Bizonyítás:

$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$s_n = \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (s_n)$ konvergens és $\lim s_n = 1 \qquad \square.$

$\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^2}$ sor:

Tétel:

$\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$

Bizonyítás:

$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} \quad (n > 1)$

$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1*2} + \dots \frac{1}{(n-1)n} = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2 \Rightarrow (s_n)$ korlátos és szigorúan monoton növekvő $\Rightarrow (s_n)$ konvergens $\qquad \square.$

Harmonikus sor:

Tétel:

$\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n}$ sor divergens és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Bizonyítás:

Legyen $2^k \leq n < 2^{k+1}$

$s_n = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}) + (\frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{n}) >$ $k * \frac{1}{2} \to \infty \Rightarrow \lim s_n = \infty \qquad \Box.$

13. Sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium. A konvergencia egy szükséges feltétele.

Cauchy-féle konvergenciakritérium:

Tétel:

$\sum\limits_{n=0} a_n$ sor konvergens $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq n_0 \, (n, m \in \mathbb{N})$:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \varepsilon$$

Bizonyítás:

$\sum a_n$ konvergens $\Leftrightarrow$ (s_n) konvergens $\underset{cauchy}{\Leftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_0, \forall \, m > n \geq n_0 (m, n \in \mathbb{N})$: $|s_m - s_n| < \varepsilon$

De $s_m - s_n = a_{n+1} + \dots + a_m \qquad \Box.$

Szükséges feltétel:

Tétel:

Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $\lim a_n = 0$

Bizonyítás:

$\sum a_n$ konvergens $\Rightarrow \forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, n_0, \forall \, m > n \geq n_0 : |a_{n+1} + \dots + a_m| < \varepsilon$

Legyen $m = n + 1 \Rightarrow \forall \, \varepsilon > 0 \; \exists n_0, \, \forall \, n \geq n_0 : |a_{n+1}| < \varepsilon \Rightarrow \lim a_n = 0 \qquad \Box.$

14. Az e-re vonatkozó $e=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ előállítás. Az e irracionális szám. $2,6<e<2,8$.

Az e-re vonatkozó: $e=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ előállítás *Tétel:*

$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}=e$

Bizonyítás:

$s_n:\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ $(n\in\mathbb{N})$, elég belátni, hogy:

s_n konvergens, és $\lim(s_n)=e$

$s_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{(n+1)!}=s_n+\frac{1}{(n+1)!}>s_n\Rightarrow(s_n)\uparrow$; Elég belátni, hogy $\exists$ felső korlát:

$x_n:=(1+\frac{1}{n})^n$ $(n\geq 1):\lim x_n=e$

Fejtsük ki binomiálisan az $(1+\frac{1}{n})^n$-t!

$$(1+\tfrac{1}{n})^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\dots+\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}+\dots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

itt: $$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k}=\frac{1}{k!}\frac{(n-k)!(n-k+1)!(n-k+2)!\dots(n-k+k)!}{(n-k)!n^k}=$$

$$=\frac{1}{k!}\frac{n-k+1}{n}\frac{n-k+2}{n}\dots\frac{n-k+k}{n}=\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{0}{n}\right)=$$

$$\frac{1}{k}!\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<\frac{1}{k!}$$

Tehát: $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{<1}+\frac{1}{3!}\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{<1}\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\underbrace{\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}_{(\triangle)}<$$

$$<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{k!}+\dots+\frac{1}{n!}=s_n$$

Tehát $\forall n\geq 1:(1+\frac{1}{n})^n<s_n$

Felső becslés s_n-re: Legyen $k\in\mathbb{N}$, és vegyük $n\geq k$ természetes számokat!

Ekkor $$\underbrace{(1+\frac{1}{n})^n}_{\text{itt a }(\triangle)\text{-beli pozitívszámokkal több van}}\geq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\dots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\underbrace{\dots}_{\to 1\cdots\to 1}(1-\frac{k-1}{n})$$

k fix, és $n\to\infty\Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\geq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{k!}\Rightarrow\forall k\in\mathbb{N}:1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{k!}=s_k\leq e$

Tehát $\forall n\in\mathbb{N}\,n\geq 1:$

$(1+\frac{1}{n})^n<s_n\leq e\underset{korl,mon}{\Rightarrow}(s_n)$ konvergens, és

$\lim(1+\frac{1}{n})^n\leq\lim(s_n)\leq e\underset{kozr.fog}{\Rightarrow}\lim(s_n)=e\qquad\Box.$

Az e irracionális szám: *Tétel:*

$e\notin\mathbb{Q}$

Bizonyítás:

Indirekt: Tegyük fel, hogy $e\in\mathbb{Q}\Rightarrow\exists\,p,q\in\mathbb{N}$, $q\neq 0$ és $\mathrm{lnko}(p,q)=1$

$e=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$

A $q\in\mathbb{N}$-hez $\exists\,\theta_q\in(0,1)$

$$e-s_q=\frac{\theta_q}{qq!}\Rightarrow\theta_q=q*q!\left(\frac{p}{q}-\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}\right)\Rightarrow\theta_q=pq!-q\sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!}\Rightarrow(k\leq q)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\theta_q}_{\in(0,1)} = \underbrace{pq! - q\sum_{k=0}^{q}(k+1)(k+2)\dots q}_{\in\mathbb{Z}}$$

$(0,1)$ intervallumban nincs egész szám $\lightning \Rightarrow e \notin \mathbb{Q}$ $\square$.

15. Pozitív tagú sorokra vonatkozó összehasonlító kritérium.

Tétel:

Tekintsük a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ pozitív tagú sorokat és tfh.: $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N: \ 0 \leq a_n \leq b_n$
Ekkor:

i, Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens
ii, Ha $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ is divergens.

Bizonyítás:

i, Tegyük fel, hogy $\sum b_n$ konvergens $\Rightarrow \sum\limits_{n=N} b_n$ konvergens.
Jelölés:

$$S_n := b_N + b_{N+1} + \cdots + b_n \quad (n \geq N)$$

$$s_n := a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n$$

$\sum\limits_{n=N} b_n$ konvergens $\Rightarrow S_{(n)}$ korlátos, de $s_n \leq S_n$ $(\forall\, n \geq N) \Rightarrow (s_n)$ korlátos $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sum\limits_{n=N} a_n$ konvergens $\Rightarrow \sum\limits_{n=0} a_n$ konvergens.

ii, Tegyük fel, hogy $\sum a_n$ divergens $\Rightarrow \sum\limits_{n=N} a_n$ divergens $\Rightarrow (s_n)$ felülről nem korlátos, de $S_n \geq s_n \quad \forall\, n \geq N \Rightarrow (S_n)$ felülről nem korlátos $\Rightarrow \sum\limits_{n=N} b_n$ divergens $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sum\limits_{n=0} b_n$ divergens. $\square$

16. A gyökkritérium.

Tétel:

Tekintsük a $\sum a_n$ sort és tegyük fel, hogy $\exists \lim \sqrt[n]{|a_n|} = A$ határérték.
Ekkor:

i, Ha $0 \leq A < 1$, akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens
ii, Ha $A > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens
iii, Ha $A = 1$, akkor $\sum a_n$ lehet konvergens vagy divergens is.

Bizonyítás:

i, Legyen $A < q < 1$, $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = A < q \Rightarrow \exists\, n_0\, \forall\, n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} < q \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, n_0\, \forall\, n \geq n_0 : |a_n| < q^n$
$\sum q^n$ geometriai sor konvergens, mert $q < 1 \Rightarrow \sum |a_n|$ is konvergens $\Rightarrow \sum a_n$ abszolút konvergens.

ii, Legyen $1 < q < A$, $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = A \Rightarrow \exists\, n_0, \forall\, n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} > q \Rightarrow |a_n| > q^n > 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sum a_n$ divergens, hiszen különben $\lim a_n = 0$

iii, Pl. $A = 1$ $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens.
$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 1 = A$
$\sum \frac{1}{n}$ divergens, és $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 = A \qquad \square$.

17. A hányadoskritérium.

Tétel:

Tekintsük a $\sum a_n$ sort, $a_n \neq 0, (n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel, hogy $\exists \lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = A$ határérték.
Ekkor:

i, Ha $0 \leq A < 1$, akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens

ii, Ha $A > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens

iii, Ha $A = 1$, akkor $\sum a_n$ lehet konvergens vagy divergens is.

Bizonyítás:

i, Legyen $A < q < 1$, $\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = A \Rightarrow \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q \Rightarrow \forall n \geq n_0 :$ $|a_{n+1}| < q|a_n| \Rightarrow |a_n| < q|a_{n-1}| < q^2|a_{n-2}| < q^3|a_{n-3}| < \cdots < q^{n-n_0}|a_{n_0}| =$ $= \underbrace{q^{-n_0}|a_{n_0}|}_{=K} * q^n \quad (n \geq n_0) \Rightarrow |a_n| < K * q^n \quad (\forall n \geq n_0)$

$\sum Kq^n$ konvergens geometriai sor, hiszen $0 < q < 1 \Rightarrow \sum |a_n|$ sor $\Rightarrow \sum a_n$ abszolút konvergens.

ii, Legyen $1 < q < A, \lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = A \Rightarrow \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > q \Rightarrow$ $\Rightarrow |a_n| > q|a_{n-1}| > \cdots > q^{n-n_0}|a_{n_0}| = Kq^n > K > 0 \Rightarrow \lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ divergens.

iii, $\sum \frac{1}{n}$ divergens, de $\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \dfrac{n}{n+1} \to 1 = A$

$\sum \frac{1}{n^2}$ konvergns, de $\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 \to 1 = A \qquad \square.$

18. A tizedes törtektre vonatkozó két tétel.

Tétel:

Tfh $(a_n) : \mathbb{N} \to \{0, 1, \ldots, 9\}$

Ekkor $\sum\limits_{n=1} \frac{a_n}{10^n}$ konvergens és $\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \in [0, 1]$

Bizonyítás:

$a_n \leq 9 \Rightarrow \frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}$

$\sum\limits_{n=1} \frac{9}{10^n}$ sor konvergens, hiszen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n-1}} = \frac{9}{10} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} =$

$= \dfrac{9}{10} * \dfrac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$ (geometriai sor) $\qquad \square.$

Tétel:

Ha $\alpha \in [0, 1]$, akkor $\exists (a_n) : \mathbb{N} \to \{0, 1, \ldots, 9\}$, hogy $\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$

Bizonyítás:

A $[0, 1]$ intervallumot 10 egyenlő intervallumra osztjuk. $\exists I_1 = [\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10}], \alpha \in I_1$

I_1-et osztjuk 10 egyenlő intervallumra. $\exists I_2 = [\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}, \frac{a_1+1}{10} + \frac{a_2+1}{100}], \alpha \in I_2$

$\vdots$

$\exists I_n = [\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}, \frac{a_1+1}{10} + \frac{a_2+1}{100} + \cdots + \frac{a_n+1}{10^n}], \alpha \in I_n$

ahol $a_1, a_2, \ldots a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$

Jel: $s_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$

$\alpha \in I_n \Leftrightarrow s_n \leq \alpha \leq s_n + \frac{1}{10^n} \Rightarrow 0 \leq \alpha - s_n \leq \frac{1}{10^n} \to 0 \Rightarrow \lim s_n = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \alpha \qquad \square.$

19. Sorok téglányszorzatának definíciója. Két konvergens sor téglányszorzatáról szóló tétel.

Definíció:

$\sum\limits_{n=0} a_n$ és $\sum\limits_{n=0} b_n$ két sor.

Ekkor a $\sum t_n$ sort *téglányszorzat*nak nevezzük, ahol $t_n := \sum\limits_{max(i,j)=n} a_i b_j$

Tétel:

Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergens, akkor a $\sum t_n$ téglányszorzat is konvergens, és $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t_n = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n)$

Bizonyítás:

$\sum\limits_{n=0}^{N} t_n = \sum\limits_{n=0}^{N} \sum\limits_{max(i,j)=n} a_i b_j = \sum\limits_{max(i,j)\leq N} a_i b_j = (\sum\limits_{n=0}^{N} a_n)(\sum\limits_{n=0}^{N} b_n) \to (\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum t_n$ konvergens és $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t_n = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty})b_n) \quad \square$.

20. Torlódási pont fogalma. Függvény határértéke egyértelmű.

Definíció:

Az $a \in \bar{\mathbb{R}}$ pont a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontja, ha $\forall \varepsilon > 0$-ra $H \cap K_\varepsilon(a)$ végtelen halmaz.

A függvény határértékének egyértelműsége:

Tétel:

Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathfrak{D}'_f$ pontban van határértéke, ha $\exists\, A \in \bar{\mathbb{R}},\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0, \forall x \in \mathfrak{D}_f \cap (K_\delta(a) \setminus \{a\}) :\ f(x) \in K_\varepsilon(A)$ és a határérték egyértelmű. $\lim\limits_a f = A$.

Bizonyítás:

Indirekt: Tegyük fel, hogy $A_1 \neq A_2$ határértékei az f függvénynek az $a \in \mathfrak{D}'_f$-ben

$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_1 > 0,\ \forall\, x \in \mathfrak{D}_f \cap (K_{\delta_1}(a) \setminus \{a\}) : f(x) \in K_\varepsilon(A_1)$

$\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_2 > 0,\ \forall\, x \in \mathfrak{D}_f \cap (K_{\delta_2}(a) \setminus \{a\}) : f(x) \in K_\varepsilon(A_2)$

$\exists\, \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(A_1) \cap K_\varepsilon(A_2) = \emptyset$

Legyen $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) \Rightarrow \varepsilon$-hoz $\exists\, \delta > 0$,

$\forall\, x \in \mathfrak{D}_f \cap K_\delta(a) \setminus \{a\} : f(x) \in K_\varepsilon(A_1)$

$\forall\, x \in \mathfrak{D}_f \cap K_\delta(a) \setminus \{a\} : f(x) \in K_\varepsilon(A_2)$

$\lightning\, K_\varepsilon(A_1) \cap K_\varepsilon(A_2) = \emptyset \qquad \square$.

21. Az átviteli elv.

Tétel:

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in \mathfrak{D}'_f$

Ekkor $\lim\limits_a f = A \Leftrightarrow \forall\, (x_n) : \mathbb{N} \to \mathfrak{D}_f \setminus \{a\}, \lim x_n = a : \lim f(x_n) = A$

Bizonyítás:

$" \Rightarrow "$ $\lim\limits_a f = A \quad \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in \mathfrak{D}_f \cap (K_\delta(a) \setminus \{a\}) : f(x) \in K_\varepsilon(A)$

Legyen $x_n : \mathbb{N} \to \mathfrak{D}_f \setminus \{a\}$ és $\lim x_n = a \Rightarrow \forall\, \delta > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_0 :$

$x_n \in K_\delta(a),\ x_n \neq a \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\ n \geq n_0 : f(x_n) \in K_\varepsilon(A) \Rightarrow \lim f(x_n) = A\ \checkmark$

$" \Leftarrow "$ Tegyük fel, hogy a jobb oldal tejlesül. *Indirekt*:

Tegyük fel, hogy a bal oldal teljesülése mellett $\lim\limits_a f \neq A. \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0\, \forall\, \delta > 0, \exists\, x \in \mathfrak{D}_f \cap (K_\delta(a) \setminus \{a\}) : f(x) \notin K_\varepsilon(A)$

Legyen $\delta = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists\, x_n \in \mathfrak{D}_f \cap (K_{\frac{1}{n}}(a) \setminus \{a\}) : f(x) \notin K_\varepsilon(A)$. De ekkor $x_n \in K_{\frac{1}{n}}(a) \Rightarrow$

$\lim x_n = a, x_n \neq a \Rightarrow \lim f(x_n) = A$

$\lightning\, f(x_n) \notin K_\varepsilon(A), n \in \mathbb{N} \qquad \square$.

22. A közrefogási elv. A műveletek és a határérték kapcsolata(bizonyítással)

Közrefogási elv:

Tétel:

$f, g, h \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$a \in (\mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g \cap \mathfrak{D}_h)'$ Tegyük fel, hogy $\exists\, K(a) : f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
$\forall\, x \in \mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g \cap \mathfrak{D}_h \cap (K_{(a)} \setminus \{a\})$
Ha $\exists \lim\limits_a f = \lim\limits_a h$, akkor $\exists \lim\limits_a g = \lim\limits_a f$

Bizonyítás:

felhasználjuk: átviteli elv + sorozatok
$(x_n) : \mathbb{N} \to \mathfrak{D}_f \setminus \{a\}$, $\lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = \lim h(x_n) \Rightarrow \lim g(x_n) = \lim f(x_n) = \lim\limits_a f \underset{atv.elv}{\Rightarrow} \lim\limits_a g = \lim\limits_a f \qquad \square.$

Műveletek és határérték kapcsolata

Tétel:

$f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in (\mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g)'$, $\exists \lim\limits_a f, \exists \lim\limits_a g$. Ekkor:

i, $\exists \lim\limits_a (f+g) = \lim\limits_a f + \lim\limits_a g$, ha ez utóbbi $\exists$
ii, $\exists \lim\limits_a (fg) = (\lim\limits_a f)(\lim\limits_a g)$, ha ez utóbbi $\exists$
iii, $\exists \lim\limits_a (\frac{f}{g}) = \frac{\lim\limits_a f}{\lim\limits_a g}$, ha ez utóbbi $\exists$

Bizonyítás:

Csak az első állítást bizonyítjuk, a többi már adódik. Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \to H \setminus \{a\}$ sorozat, melyre $\lim x_n = a$. Ekkor
$\lim\limits_a f = A \underset{atv.elv}{\Rightarrow} \lim(f(x_n)) = A$
$\lim\limits_a g = B \underset{atv.elv}{\Rightarrow} \lim(g(x_n)) = B$
Most van két sorozatunk, melyekre alkalmazzuk a műveletek tulajdonságait és az átviteli elvet:

$$\exists \lim(f(x_n) + g(x_n)) = A + B \underset{atv.elv}{\Rightarrow} \lim_a (f+g) = A + B \qquad \square.$$

23. A hatványfüggvény határértéke.

Tétel:

$\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n \quad (a \in \mathbb{R})$

Bizonyítás:

$|x^n - a^n| = |x-a| \underbrace{|x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}|}_{\leq c} \leq |x-a|c \leq \delta c < \varepsilon$
Hiszen feltehető: $x \in K_1(a)$, azaz $x \in (a-1, aA) \Rightarrow |x| \leq |a| + 1$
$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \min(\frac{\varepsilon}{c}, 1), \forall\, x \in \mathbb{R} \cap (K_\delta(a) \setminus \{a\}) : x^n \in K_\varepsilon(a^n) \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} x^n = a^n \quad \square.$

24. Monoton függvények határértéke.

Tétel:

Legyen $=(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$ korlátos, vagy nem korlátos intervallum. $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ monoton függvény.

Ekkor $\exists\lim\limits_{a+0} f$ és $\lim\limits_{a-0} f$, $a\in(\alpha,\beta)$:

i, Ha f monoton nő, akkor:

$$\lim_{a+0} f=\inf\{f(x)\quad x<a,\, x\in(\alpha,\beta)\}$$

$$\lim_{a-0} f=\sup\{f(x)\quad x<a,\, x\in(\alpha,\beta)\}$$

ii, Ha f monoton fogy, akkor:

$$\lim_{a+0} f=\inf\{f(x)\quad x>a,\, x\in(\alpha,\beta)\}$$

$$\lim_{a-0} f=\sup\{f(x)\quad x>a,\, x\in(\alpha,\beta)\}$$

Bizonyítás:

Elég csak egy esetet belátni, a többi állítás a sup és inf tulajdonságaiból, és az első álliítás bizonyításából értelemszerűen adódik.

Legyen $M=\sup\{f(x)\quad x<a\}\Rightarrow f(x)\leq M\quad\forall\, x<a, x\in(\alpha,\beta)$

$\forall\,\varepsilon>0\,\exists\, x_1<a: M-\varepsilon<f(x_1)\leq M\Rightarrow\forall\, x_1<x<a: M-\varepsilon<f(x)<\leq M$

Legyen $\delta: a-x_1\Rightarrow\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,\delta=a-x_1,\forall\, x\in(\alpha,\beta), x<a,\ 0<a-x<\delta:$

$|f(x)-M|<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{a-0} f=M\qquad\square.$

Felhasznált irodalom

- ELTE IK programtervezői informatikus szak 2012 tavaszi féléves Analízis I. előadás alapján írt órai jegyzetem
- Szili László: Analízis Feladatokban I.
- Wikipédia
- Szántó Ádám: Analízis