ANALÍZIS I. DEFINÍCIÓK, TÉTELEK

Szerkesztette: *Balogh Tamás*

2012. június 26.

Ha hibát találsz, kérlek jelezd a *info@baloghtamas.hu* e-mail címen!

1. Hogyan szól a Bernoulli-egyenlőtlenség? Mikor van egyenlőség?
Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$ és $-1 \leq h \in \mathbb{R}$.
Ekkor: $(1+h)^n \geq 1 + n * h$ és $" = " \Leftrightarrow n = 1 \vee h = 0$

2. Fogalmazza meg a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget! Mikor van egyenlőség?
Def.: Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq x_1 \ldots x_n \in \mathbb{R}$.
Ekkor $x_1 x_2 ... x_n \leq (\frac{x_1 + x_2 ... + x_n}{n})^n$ és $" = " \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

3. Írja le a valós számok közötti rendezés és műveletek kapcsolatára vonatkozó axiómákat!
- $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$
- $x \leq y \Rightarrow xz \leq yz \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall z \geq 0$

4. Mit mond ki a teljességi axióma?
Ha $A, B \subset \mathbb{R},\ A, B \neq \emptyset,\ a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$, akkor
$\exists \xi \in \mathbb{R}$: $a \leq \xi \leq b$

5. Fogalmazza meg a szuprémum elvet
$\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz felső korlátai között van legkisebb.
A legkisebb felső korlát a szuprémum. Jele: $\sup H$

6. Mit jelent az, hogy a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz induktív?
$\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ induktív halmaz, ha
- $0 \in H$
- $x \in H \Rightarrow x + 1 \in H$

7. Hogyan értelmezi a természetes számok halmazát?
Természetes számok halmaza a legszűkebb induktív halmaz, azaz

$$\mathbb{N} = \bigcap_{\substack{H \subset \mathbb{R} \\ \text{H induktív}}} H$$

8. Fogalmazza meg a teljes indukció elvét!
Legyen A_n egy állítás.
$\forall n \in \mathbb{N}$
Tfh.: A_0 igaz
Ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is igaz $\quad n \in \mathbb{N}$
Ekkor A_n igaz $\forall n \in \mathbb{N}$-re.

9. Mikor van egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaznak maximuma(minimuma)?
$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaznak $\exists$ maximuma(minimuma), ha
$\exists\, \alpha \in A \quad x \leq \alpha \quad \forall\, x \in A$
$\exists\, \alpha \in A \quad x \geq \alpha \quad \forall\, x \in A$

10. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy a $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaznak *nincs* minimuma!
$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ nincs minimuma, ha
$\forall \alpha \in A : \exists x \in A \quad x < \alpha$

11. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy a $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaznak *nincs* maximuma!
$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ nincs maximuma, ha
$\forall \alpha \in A : \exists x \in A \quad x > \alpha$

12. Mikor felülről (alulról) korlátos egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz?
$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ felülről (alulról) korlátos, ha
$\exists \xi \in \mathbb{R} : \ x \leq \xi \ (x \geq \xi) \quad \forall x \in A$

13. Fogalmazza meg pozitív állítás formájában azt, hogy egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről *nem* korlátos!
$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ felülről *nem* korlátos, ha
$\forall \xi \in \mathbb{R} : \exists x \in A : \ x > \xi$

14. Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}$. Mit jelent az A elemeire nézve az, hogy $\xi = \sup A$?
$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos, akkor $\sup A = \xi \Leftrightarrow$

- $\forall x \in A : \ x \leq \xi$
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A : \ x > \xi - \varepsilon$

15. Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}$. Mit jelent az A elemeire nézve az, hogy $\xi = \inf A$?
$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos, akkor $\inf A = \xi \Leftrightarrow$

- $\forall x \in A : \ x \geq \xi$
- $\forall \varepsilon > 0 \, \exists x \in A : \ x < \xi + \varepsilon$

16. Mit jelent az, hogy a valós számok halmaza rendelkezik az arkhimédeszi tulajdonsággal?
$\forall a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : b < an$

17. Mit jelent az, hogy a valós számok halmaza rendelkezik a Cantor-tulajdonsággal?
Legyen $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ korlátos zárt intervallum
Ha $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$-re, akkor $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

18. Definiálja a következő fogalmakat: *reláció, reláció értelmezési tartománya*, és *értékkészlete!*
reláció: $r \subset A \times B$ részhalmaz
reláció értelmezési tartománya: $\mathfrak{D}_r = \{a \in A | \exists \, b \in B : (a, b) \in r\}$
reláció értékkészelete: $\mathfrak{R}_r = \{b \in B | \exists \, a \in A : (a, b) \in r\}$

19. Adja meg a függvény definicióját!
$f \subset A \times B$ függvény, ha $\forall x \in \mathfrak{D}_f \ \exists! \, y \in \mathfrak{R}_f : (x, y) \in f$.

20. Hogyan értelmezzük halmaz függvény által létesített *képét*?
$f : A \to B, \ C \subset A$
C halmaz képe: $f[C] := \{f(x) : x \in C\} \subset B$.

21. Hogyan értelmezzük halmaz függvény által létesített *ősképét*?
$f : A \to B, \ D \subset B$
D halmaz ősképe: $f^{-1}[D] := \{x \in A : f(x) \in D\} \subset A$.

22. Mikor nevezünk egy függvényt *invertálható*nak?
$f : A \to B$ invertálható(injektív), ha
$\forall x, y \in \mathfrak{D}_f$, $x \neq y$ esetén $f(x) \neq f(y)$.

23. Definiálja az inverz függvényt!
Tegyük fel, hogy $f : A \to B$ függvény injektív, azaz $\forall y \in \mathfrak{R}_f \; \exists! \, x \in \mathfrak{D}_f : f(x) = y$!
Az f *inverze* $f^{-1} : \mathfrak{R}_f \to \mathfrak{D}_f, y \to x$.

24. Mi a *bijekció* definiciója?
$f : A \to B$ bijekció, ha f injektív és $\mathfrak{R}_f = B$.

25. Írja le az *öszetett függvény* fogalmát!
Tegyük fel, hogy $f : A \to B$, $g : C \to D$ olyan függvények, melyekre $\mathfrak{R}_g \cap \mathfrak{D}_f \neq \emptyset$
Ekkor a két függvény kompoziciója: $f \circ g = \{x \in \mathfrak{D}_g | g(x) \in \mathfrak{D}_f\} \to B$
$(f \circ g)(x) := f(g(x))$.

26. Definiálja a következő fogalmakat: *valós sorozat*, sorozat n-edik *tagja, index*!
Valós számsorozatok: $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvény
$a(n) \, (n \in \mathbb{N}) = (a_n)$ *a sorozat n-edik tagja*, n az n-edik tag *indexe*.

27. Mit jelent az, hogy egy $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat korlátos?
Az $a = (a_n)$ sorozat:

- felülről korlátos, ha $\exists k \in \mathbb{R} : a_n \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- alulról korlátos ha $\exists k \in \mathbb{R} : a_n \geq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.

28. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy az (a_n) sorozat *nem* korlátos!
(a_n) sorozat *nem* korlátos $\Leftrightarrow \forall \, k \in \mathbb{R} \;\; \exists \, n \in \mathbb{N} : \quad |a_n| > k$

29. Mit jelent az, hogy egy (a_n) számsorozat indexsorozat?
$(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sorozat *indexsorozat*, ha szigorúan monoton nő.

30. Egy (a_n) sorozatról mikor mondjuk, hogy a (b_n) sorozat részsorozata?
Azt mondjuk, hogy (a_n) sorozat a (b_n) sorozat részsorozata, ha $\exists \, \nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat, hogy $a = b \circ \nu$, azaz $(a_i) = (b_{\nu_i})$

31. Mit ért egy sorozat részsorozatán?
$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat, $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat
Az $a \circ \nu = (a_{\nu_n})$ sorozat az a részsorozata.

32. Mi a definíciója annak, hogy egy valós számsorozatnak van csúcsa?
a_{n_0} az (a_n) sorozat csúcsa, ha $\forall n \geq n_0 : \; a_{n_0} \geq a_n$

33. Definiálja az $A \in \bar{\mathbb{R}}$ elem $\varepsilon > 0$ *sugarú környezetét*!
Az $A \in \mathbb{R}$ $\varepsilon > 0$ sugarú környezete: $k_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ intervallum.
Az $A = \infty$ $\varepsilon > 0$ sugarú környezete: $k_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$ intervallum.
Az $A = -\infty$ $\varepsilon > 0$ sugarú környezete: $k_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$ intervallum.

34. Mikor nevezünk egy (a_n) valós sorozatot konvergensnek?
Az (a_n) sorozat konvergens, ha $\exists A \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$

35. Mit jelent az, hogy egy (a_n) sorozat *divergens*?
Az (a_n) sorozat divergens, ha nem konvergens, azaz $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geq n_0 :$ $|a_n - A| \geq \varepsilon$

36. Tegyük fel, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám. Igaz- e az hogy $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall \varepsilon > 0$-ra és $\forall n \geq n_0$-ra $|a_n - A| < \varepsilon$? (válaszát indokolja!)
Ebből az következne, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $a_n = A$. Az állítás nem igaz, mert létezik olyan sorozat, amelynek a határértéke $A \in \mathbb{R}$, de nem igaz, hogy a sorozat értéke minden $n \geq n_0$-ra egyenlő A-val.

37. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}$ szám minden környezete az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagját tartalmazza. Következik-e ebből az, hogy az (a_n) sorozat konvergens?
Nem, pl. az $(a_n) = (-1)^n$ sorozat divergens, de az $A = 1$ szám minden környezetébe a sorozatnak végtelen sok tagja esik.

38. Mit jelent az, hogy az (a_n) sorozat $(+\infty)$-hez tart?
(a_n) sorozat a $(+\infty)$-hez tart, ha $\forall P \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 :\ a_n > P$

39. Mi a definíciója annak, hogy az (a_n) sorozatnak $-\infty$ a határértéke?
(a_n) sorozat határértéke $-\infty$, ha $\forall P \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 :\ a_n < P$

40. Mit jelent az, hogy az (a_n) sorozatnak *van határértéke*?
Az (a_n) sorozatnak $\exists$ határértéke, ha $\exists A \in \bar{\mathbb{R}},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 :\ a_n \in K_\varepsilon(A)$

41. Adott $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ A \in \bar{\mathbb{R}}$ esetén mi a definíciója a $\lim(a_n) = A$ egyenlőségnek?
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ a_n \in K_\varepsilon(A)$

42. Fogalmazza meg a sorozatok konvergenciájára vonatkozó *szükséges feltételt*!
Ha (a_n) konvergens $\Rightarrow$ (a_n) korlátos.

43. Fogalmazza meg a sorozatokra vonatkozó közrefogási elvet!
$(a_n), (b_n), (c_n)$ sorozatok. Tegyük fel, hogy:
$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad a_n \leq b_n \leq c_n$ ha $\exists \lim a_n = \lim c_n$, akkor $\exists \lim b_n = \lim a_n$

44. Milyen állításokat ismer a határérték és a rendezés között?
1. Közrefogási elv(rendőr elv):
   $(a_n), (b_n), (c_n)$ sorozatok. Tegyük fel, hogy:
   $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad a_n \leq b_n \leq c_n$ ha $\exists \lim a_n = \lim c_n$, akkor $\exists \lim b_n = \lim a_n$
2. $(a_n), (b_n)$ sorozatok, $\exists\, A = \lim a_n,\ \exists\, B = \lim b_n$
   i, $A > B \Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N :\ a_n > b_n$
   ii, $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N : a_n \geq b_n \Rightarrow A \geq B$

45. Igaz-e, az hogy, ha az (a_n) és a (b_n) sorozatoknak van határértéke és $a_n > b_n$ minden n-re, akkor $\lim(a_n) > \lim(b_n)$?
Nem, nem igaz. Ellenpélda: $(a_n) := \frac{1}{n}$, $(b_n) := \frac{-1}{n}$, Ekkor $(a_n) > (b_n)$, de $\lim a_n = \lim b_n = 0$
Megj.: A feltevés **csak** a másik irányban igaz: (a_n) és (b_n) sorozatok, létezik határértékük, ekkor:
$\lim(a_n) > \lim(b_n) \Rightarrow \exists N,\ \forall n \geq N :\ a_n > b_n$

46. Mondja ki a monoton sorozatok konvergenciájára és határértééke vonatkozó állításokat!
Ha (a_n) monoton nő, és felülről korlátos, akkor konvergens is, és $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$
Ha (a_n) monoton fogy és alulról korlátos, akkor konvergens is, és $\lim a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$
Ha (a_n) monoton nő, és felülről nem korlátos, akkor divergens, és $\lim a_n = \infty$
Ha (a_n) monoton fogy és alulról nem korlátos, akkor divergens, és $\lim a_n = -\infty$

47. Milyen műveleti tételeket ismer konvergens sorozatokra?
Tfh. (a_n) és (b_n) konvergens sorozat, és $\lim a_n = A$, $\lim b_n = B \quad (A, B \in \mathbb{R})$. Ekkor:
i, $(a_n + b_n)$ is konvergens és $\lim(a_n + b_n) = A + B$
ii, $(a_n b_n)$ is konvergens és $\lim(a_n b_n) = AB$
iii, ha $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ $B \neq 0$, ekkor:
$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ is konvergens és $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$

48. Igaz-e az, hogy ha (a_n) konvergens és (b_n) divergens, akkor $(a_n + b_n)$ is divergens?
Igen, igaz, mert ha $(a_n + b_n)$ konvergens lenne, akkor $(a_n + b_n - a_n) = (b_n)$ is konvergens lenne.

49. Fogalmazza meg a sorozatok összegének határértékére vonatkozó állítást!
Tfh. $\lim a_n = A \in \bar{\mathbb{R}}, \lim b_n = B \in \bar{\mathbb{R}}$!
Ha $A + B$ értelmes, akkor $\lim(a_n + b_n) = A + B$

50. Táblázattal szemlétetsse a sorozatok szorzatának a határértékére vonatkozó állítást!

	$A > 0$	$A = 0$	$A < 0$	$A = \infty$	$A = -\infty$
$B > 0$	$A * B$	$A * B$	$A * B$	$+\infty$	$-\infty$
$B = 0$	$A * B$	$A * B$	$A * B$	$-$	$-$
$B < 0$	$A * B$	$A * B$	$A * B$	$-\infty$	$+\infty$
$B = \infty$	$+\infty$	$-$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$B = -\infty$	$-\infty$	$-$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

51. Fogalmazza meg a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tételt!
$\forall$ korlátos sorozatnak $\exists$ konvergens részsorozata.

52. Definálja a Cauchy-sorozatot!
(a_n) Cauchy-sorozat, ha $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq n_0\, (n, m \in \mathbb{N}) :\ |a_n - a_m| < \varepsilon$

53. Fogalmazza meg pozitív állítás formájában azt, hogy egy $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat *nem* Cauchy-sorozat!
(a_n) sorozat **nem** Cauchy-sorozat, ha $\exists\ \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists\, n, m \geq n_0\, (n, m \in \mathbb{N}) :\ |a_n - a_m| \geq \varepsilon$

54. Fogalmazza meg a sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériumot!
$(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat konvergens $\Leftrightarrow$ (a_n) Cauchy-sorozat.

55. Hogyan értelmezzük az e számot?
Az $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ sorozat korlátos, és monoton nő, ezért konvergens és
$e := \lim(1 + \frac{1}{n})^n \sim 2,71$

56. Milyen állítást ismer a (q^n) mértani sorozat határértékvel kapcsolatosan?

$$\lim q^n = \begin{cases} 0, & ha\ |q| < 1 \\ 1, & ha\ q = 1 \\ \infty, & ha\ q > 1 \\ \nexists, & ha\ q \leq -1 \end{cases}$$

57. Fogalmazza meg egy valós szám m-edik gyökének a létezésére vonatkozó tételt!

Tfh. $m \geq 2 \wedge m \in \mathbb{N}$! Ekkor

i, $\forall A > 0\ \exists! \alpha > 0 : \alpha^m = A$

ii, Ha $a_0 > 0, a_{n+1} = \frac{1}{m}\left(\dfrac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right)$ sorozat konvergens és $\lim a_n = \alpha$

58. Legyen $A > 0, 1 < m \in \mathbb{N}$. Melyik az a sorozat, amelynek határértéke $\sqrt[m]{A}$?

$$\begin{cases} a_0 > 0 \\ a_{n+1} = \frac{1}{m}\left(\dfrac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right) \end{cases}$$

sorozat határértéke: $\lim a_n = \alpha$, ahol $\alpha = \sqrt[m]{A}$.

59. Mi a végtelen sor definíciója?

Az (a_n) sorozat által meghatározott $\sum a_n$ végtelen soron az s_n sorozatot értjük, ahol $s_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$

60. Mit jelent az, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor *konvergens*, és hogyan értelmezzük az *összegét*?

$\sum\limits_{n=0} a_n$ konvergens, ha (s_n) konvergens és $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \lim s_n \in \mathbb{R}$ a végtelen sor összege

61. Milyen tételt ismer $q \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum\limits_{n=0} q^n$ geometriai sor konvergenciájáról?

$\sum\limits_{n=0} q^n$ sor konvergens $\Leftrightarrow |q| < 1$

Ekkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

62. Mi a *teleszkópikus sor* és mi az *összege*?

Teleszkópikus sor: $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

Összege: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

63. Fogalmazza meg a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergrenciakritériumot!

$\sum\limits_{n=0} a_n$ sor konvergens $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m > n \geq n_0\ (n, m \in \mathbb{N})$:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \varepsilon$$

64. Ismer-e sorok konvergenciájára vonatkozó szükgséges feltételt?

Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $\lim a_n = 0$.

65. Igaz-e az, hogy ha $\lim(a_n) = 0$, akkor a $\sum a_n$ sor konvergens?

Nem, nem igaz: $\lim a_n = 0 \nRightarrow \sum a_n$ konvergens

Ellenpélda: $a_n = \frac{1}{n}$: $\lim \frac{1}{n} = 0$, de $\sum \frac{1}{n}$ divergens.

66. Fogalmazza meg a nem-negatív tagú sorok konvergenciájára vonatkozó tételt!
$\sum a_n$ pozitív tagú sor konvergens $\Leftrightarrow$ (s_n) korlátos.

67. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *összehasonlító kritériumot*!
Tekintsük a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ pozitív tagú sorokat és tfh.: $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N: \quad 0 \leq a_n \leq b_n$
Ekkor:

i, Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens
ii, Ha $\sum a_n$ divergens, akkor $\sum b_n$ is divergens.

68. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *gyökkritériumot*!
(Cauchy-féle gyökkritérium)
Tekintsük a $\sum a_n$ sort és tegyük fel, hogy $\exists \lim \sqrt[n]{|a_n|} = A$ határérték.
Ekkor:

i, Ha $0 \leq A < 1$, akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens
ii, Ha $A > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens
iii, Ha $A = 1$, akkor $\sum a_n$ lehet konvergens vagy divergens is.

69. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *hányadoskritériumot*!
(D' Alambert-féle hányados kritérium)
Tekintsük a $\sum a_n$ sort, $a_n \neq 0, (n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel, hogy $\exists \lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = A$ határérték.
Ekkor:

i, Ha $0 \leq A < 1$, akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens
ii, Ha $A > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens
iii, Ha $A = 1$, akkor $\sum a_n$ lehet konvergens vagy divergens is.

70. Mik a Leibniz-tipusú sorok és milyen konvergenciatételt ismer ezekkel kapcsolatban?
Leibniz tipusú sorok : Legyen $0 \leq a_{n+1} \leq a_n \, \forall \, n \in \mathbb{N}$.
Ekkor a $\sum\limits_{n=1} (-1)^{n+1} a_n$ Leibniz tipusú sor.

Tétel: Tegyük fel, hogy $\sum (-1)^{n+1} a_n$ Leibniz tipusú sor.
Ekkor:

i, $\sum\limits_{n=1} (-1)^{n+1} a_n$ konvergens $\Leftrightarrow \lim a_n = 0$
ii, Ha $\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ és $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$, akkor $|s_n - \alpha| \leq a_n \quad (\forall n \geq 1)$

71. Adjon meg egy olyan végtelen sort, amelyik konvergens, de nem aboszulút konvergens!
$\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergens, de nem abszolút konvergens, hiszen $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n}$ divergens.

72. Adjon meg egy olyan végtelen sort, amelyiknek az összege az *e* szám!
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

73. Mondja ki a tizedestörtekről a tételeket!

i, Tfh $(a_n) : \mathbb{N} \to \{0, 1, \dots, 9\}$

Ekkor $\sum\limits_{n=1} \frac{a_n}{10^n}$ konvergens és $\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \in [0, 1]$

ii, Ha $\alpha \in [0, 1]$, akkor $\exists\, (a_n) : \mathbb{N} \to \{0, 1, \dots, 9\}$, hogy $\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$

74. Mit nevez egy számsor zárójelezett sorának?

Legyen $(m_n) : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ indexsorozat, azaz szigorúan monoton növekvő és $m_0 = 0$.
Legyen $\alpha_n = (a_{m_{n-1}+1} + a_{m_{n-1}+2} + \dots + a_{m_n})$
Ekkor $\sum\limits_{n=1} \alpha_n$ a $\sum\limits_{n=1} a_n$ sor egy zárójelezése.

75. Hogyan szólnak a végtelen sorok zárójelezésére vonatkozó tételek?

i, Ha $\sum\limits_{n=1} a_n$ konvergens, akkor $\forall (m_n) : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ indexsorozatra $\sum\limits_{n=1} \alpha_n$ is konvergens, és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$

ii, Tegyük fel, hogy $(m_n) : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ indexsorozat.
1, $(m_n - m_{n-1})$ sorozat korlátos
2, $\lim a_n = 0$
3, $\sum \alpha_n$ konvergens

Ekkor $\sum\limits_{n=1} a_n$ is konvergens, és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$

76. Mit nevez egy végtelen sor átrendezésének?

Ha $(p_n) : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ bijekció, akkor $\sum a_{p_n}$ a $\sum a_n$ sor átrendezése.

77. Fogalmazza meg a *feltételesen konvergens* sorok átrendezésére vonatkozó *Riemann-tételt*!

Tegyük fel, hogy $\sum\limits_{n=1} a_n$ sor feltételesen konvergens. Ekkor:

i, $\forall A \in \bar{\mathbb{R}} \quad \exists\, (p_n) : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ bijekció hogy $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$

ii, $\exists (p_n) : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ bijekció, hogy $\sum a_{p_n}$ divergens.

78. Milyen állítást ismer *abszolút konvergens* sorok átrendezésévével kapcsolatban?

Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens, akkor $\forall (p_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekcióra $\sum a_{p_n}$ is abszolút konvergens és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{p_n}$.

79. Definiálja a $\sum\limits_{n=0} a_n$, $\sum\limits_{n=0} b_n$ sorok *téglányszorzatát*!

$\sum\limits_{n=0} a_n$ és $\sum\limits_{n=0} b_n$ két sor.
Ekkor a $\sum t_n$ sort *téglányszorzat*nak nevezzük, ahol $t_n := \sum\limits_{max(i,j)=n} a_i b_j$

80. Definiálja a $\sum\limits_{n=0} a_n$, $\sum\limits_{n=0} b_n$ sorok *Cauchy-szorzatát*!

$\sum\limits_{n=0} a_n$ és $\sum\limits_{n=0} b_n$ két sor.
Ekkor a $\sum c_n$ sort *Cauchy-szorzat*nak nevezzük, ahol $c_n := \sum\limits_{i+j=n} a_i b_j$

81. Adjon meg olyan végtelen sorokat, amelyek Cauchy-szorzata divergens!
$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ sornak önmagával vett *Cauchy-szorzat*a divergens.

82. Fogalmazza meg az *abszolút konvergens* sorok szorzatára vonatkozó *Cauchy-tételt*!
Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ abszolút konvergens, akkor $\sum t_n$ tégläny-szorzat és $\sum c_n$ Cauchy-szorzat is abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$$

83. Fogalmazza meg a *Mertens-tételt*!
Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens, és $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum c_n$ Cauchy-szorzat konvergens és

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n).$$

84. Írja le a *hatványsor* definícióját!
$\alpha_n, a \in \mathbb{R}$
A $\sum \alpha_n (x-a)^n$ sort a közepű hatványsornak nevezzük.

85. Fogalmazza meg a hatványsorok konvergencia sugaráról az általánosított Cauchy-Hadarmard-tételt!
Tekintsük a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ hatványsort! Ekkor a következő 3 tulajdonság egyike áll fent:
i, $\exists 0 < R < \infty$, hogy $|x-a| < R$ esetén $\sum \alpha_n (x-a)^n$ sor abszolút konvergens.
Ha $|x-a| > R$, akkor a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ sor divergens.
ii, A hatványsor csak $x = a$ esetén konvergens. Ekkor $R = 0$.
iii, A hatványsor $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén abszolút konvergens. Ekkor $R = \infty$.
Ahol R a hatványsor konvergenciasugara.

86. Fogalmazza meg a Cauchy-Hadamard-tételt!
Tekintsük a $\sum \alpha_n (x-a)^n$ hatványsort. Tegyük fel, hogy $\exists \lim \sqrt[n]{|\alpha_n|} = A \in \bar{\mathbb{R}}$ $(A \geq 0)$
Legyen

$$R := \begin{cases} \frac{1}{A} : & 0 < A < \infty \\ \infty : & A = 0 \\ 0 : & A = \infty \end{cases}$$

Ekkor $|x-a| < R$ esetén $\sum \alpha_n (x-a)^n$ abszolút konvergens
és $|x-a| > R$ esetén $\sum \alpha_n (x-a)^n$ divergens.

87. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $(-1, 1)$ intervallum!
$\sum (x^n)$ hatványsor konvergenciahalmaza a $(-1, 1)$ intervallum. Konvergenciasugara pedig 1.

88. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $(-1, 1]$ intervallum!
$\sum(\frac{(-1)^n}{n} * x^n)$ hatványsor konvergenciahalmaza a $(-1, 1]$ intervallum. Konvergenciasugara pedig 1.

89. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $[-1, 1)$ intervallum!
$\sum(\frac{x^n}{n})$ hatványsor konvergenciahalmaza a $[-1, 1)$ intervallum. Konvergenciasugara pedig 1.

90. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $[-1, 1]$ intervallum!
$\sum(\frac{x^n}{n^2})$ hatványsor konvergenciahalmaza a $[-1, 1]$ intervallum. Konvergenciasugara pedig 1.

91. Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyik csak az $a = 2$ pontban konvergens!
$\sum n^n(x-2)^n$.

92. Definiálja az exp függvényt!

Exponenciális függvény: $\exp(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

93. Definiálja a sin függvényt!

Szinusz függvény: $\sin(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n * \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots$

94. Definiálja a cos függvényt!

Koszinusz függvény: $\cos(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n * \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$

95. Írja fel a $\sin(x+y)$-t $\sin x, \cos x, \sin y, \cos y$ segítségével!
$\sin(x+y) = \sin x * \cos y + \cos x * \sin y$

96. Mit jelent az, hogy $a \in \bar{\mathbb{R}}$ torlódási pontja a $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak?
Az $a \in \bar{\mathbb{R}}$ pont a $H \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontja, ha $\forall \varepsilon > 0$-ra $H \cap K_\varepsilon(a)$ végtelen halmaz.

97. Mivel egyenlő az $\mathbb{R}'$, a $\mathbb{Q}'$ és az $(\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\})'$ halmaz?
$\mathbb{R}' = \bar{\mathbb{R}}, \mathbb{Q}' = \bar{\mathbb{R}}, \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$

98. Adott $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in D'_f$, $A \in \bar{\mathbb{R}}$ esetén mi a definíciója a $\lim_a f = A$ egyenlőségnek?
Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathfrak{D}'_f$ pontban van határértéke, ha
$\exists A \in \bar{\mathbb{R}}$, $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathfrak{D}_f \cap (K_\delta(a) \setminus \{a\}) : f(x) \in K_\varepsilon(A)$ és a határérték egyértelmű. $\lim\limits_a f = A$.

99. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett véges* határérték definícióját!
$a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0$, $\forall x \in \mathfrak{D}_f$, $0 < |x - a| < \delta : |f(x) - A| < \varepsilon$

100. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett plusz végtelen* határérték definícióját!
$a \in \mathbb{R},\ A = \infty : \forall P \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathfrak{D}_f,\ 0 < |x-a| < \delta :\ f(x) > P$

101. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *végesben vett mínusz végtelen* határérték definícióját!
$a \in \mathbb{R},\ A = -\infty : \forall P \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathfrak{D}_f,\ 0 < |x-a| < \delta :\ f(x) < P$

102. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végteelnben vett véges* határérték definícióját!
$a = \infty,\ A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\, \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathfrak{D}_f,\ x > x_0 :\ |f(x) - A| < \varepsilon$

103. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *mínusz végtelenben vett véges* határérték definícióját!
$a = -\infty,\ A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\, \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathfrak{D}_f,\ x < x_0 :\ |f(x) - A| < \varepsilon$

104. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett plusz végtelen* határérték definícióját!
$a = \infty,\ A = \infty : \forall P \in \mathbb{R}\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathfrak{D}_f,\ x > x_0 :\ f(x) > P$

105. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett mínusz végtelen* határérték definícióját!
$a = \infty,\ A = -\infty : \forall P \in \mathbb{R}\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathfrak{D}_f,\ x > x_0 :\ f(x) < P$

106. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *mínusz végtelenben vett plusz végtelen* határérték definícióját!
$a = -\infty,\ A = \infty : \forall P \in \mathbb{R}\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathfrak{D}_f,\ x < x_0 :\ f(x) > P$

107. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *mínusz végtelenben vett mínusz végtelen* határérték definícióját!
$a = -\infty,\ A = -\infty : \forall P \in \mathbb{R}\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathfrak{D}_f,\ x < x_0 :\ f(x) < P$

108. Írja le a határértékre vonatkozó átviteli elvet!
$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in \mathfrak{D}'_f$ Ekkor
$\lim\limits_a f = A \Leftrightarrow \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathfrak{D}_f \setminus \{a\},\ \lim x_n = a : \lim f(x_n) = A$

109. Mit tud mondani a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről?
$\sum \alpha_n (x-a)^n$ hatványsor konvergenciasugara $R > 0$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-a)^n$
$\forall x \in K_R(a)$, $b \in K_R(a)$. Ekkor $\lim\limits_b f = f(b)$

110. Mit lehet mondani monoton *növekedő* függvény határértékéről?
Legyen $= (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ korlátos, vagy nem korlátos intervallum. $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ monoton növekedő függvény.
Ekkor $\exists \lim\limits_{a+0} f$ és $\lim\limits_{a-0} f$, $a \in (\alpha, \beta)$:

$$\lim_{a+0} f = \inf\{f(x) \quad x < a,\ x \in (\alpha, \beta)\}$$

$$\lim_{a-0} f = \sup\{f(x) \quad x < a,\ x \in (\alpha, \beta)\}$$

111. Mit lehet mondani monoton *csökkenő* függvény határértékéről?

Legyen $= (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ korlátos, vagy nem korlátos intervallum. $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ monoton csökkenő függvény.

Ekkor $\exists \lim\limits_{a+0} f$ és $\lim\limits_{a-0} f$, $a \in (\alpha, \beta)$:

$$\lim_{a+0} f = \inf\{f(x) \quad x > a,\, x \in (\alpha, \beta)\}$$
$$\lim_{a-0} f = \sup\{f(x) \quad x > a,\, x \in (\alpha, \beta)\}$$

Felhasznált irodalom

- ELTE IK programtervezői informatikus szak 2012 tavaszi féléves Analízis I. előadás alapján írt órai jegyzetem
- Szili László: Analízis Feladatokban I.
- Wikipédia