7. óra

# Abszolútértékes egyenletek és egyenlőtlenségek

|x| x ha x≥0 -x, ha x<0

## Háromszög-egyenlőtlenségek

Név eredete: Vektorokra is igaz.

### $$|x+y|\leq |x|+|y|$$

Szétszedhetnénk 4 esetet (x, y pozitív, negatív), vagy:

-|x| ≤ x ≤ |x|
-|y| ≤ y ≤ |y|
Összead:
-(|x|+|y|) ≤ x+y ≤ |x|+|y|
Dobjuk ki a bal oldalt! Ábrázoljuk és lássuk be:
|x+y| ≤ |x|+|y|

### $$|x-y| \geq ||x|-|y||$$

|x|=|(x-y)+y| ≤ |x-y|+|y|
|x|-|y|≤|x-y|
|y|=|(y-x)+x|≤|y-x|+|x|
|y|-|x|≤|x-y|
max(-(|x|-|y|), |x|-|y|)≤|x-y|
|(|x|-|y||≤|x-y|

## $$\left|2x-7\right|+ \left|2x+7\right|= 14$$

2x-7 zérushelye: x=3.5

2x+7 zérushelye: x=-3.5

### 1. eset: (x<-3.5) 2x+7<0 2x-7<0

|2x+7|=-2x-7 |2x-7|=-2x+7
-2x+7-2x-7=14
-4x=14
x=-14/4=-3.5
Ez megoldás? Nem. Ha x<-3.5, akkor x nem lehet = -3.5!

### 2. eset: (-3.5≤x<3.5) 2x+7≥0 2x-7<0

|2x+7|=2x+7 |2x-7|=-2x+7
14=14
Ez megoldás? Igen. Minden x-re teljesül -3.5 és 3.5 között [-3.5, 3.5).

### 3. eset: (x≤3.5) 2x+7≥0 2x-7≥0

|2x+7|=2x+7 |2x-7|=2x+7
4x=14
x=3.5
Ez megoldás? Igen. x≤3.5 volt a feltétel. Tehát x lehet = 3.5.

### Összes megoldás

2. eset ∪ 3. eset. x∈[3.5, 3.5]

## $$\left|x^{2}-4x-5\right|+\left|x-2\right|=7$$

$x^{2}-4x-5 $zérushelyei: $\frac{4\pm \sqrt{16+20}}{2}$ x1=5 x2=-1

x-2 zérushelye: x=2 (2-nél kisebb x-ekre negatív, különben pozitív.)

### 1. eset (x<-1) $x^{2}-4x-5$>0 x-2<0

$$x^{2}-4x-5-x+2$$

A két megoldásból 1 jó: $\frac{5-\sqrt{65}}{2}$

### 2. eset (-1≤x<2) $x^{2}-4x-5$≤0 x-2<0

$$-x^{2}+4x+5-x+2=7$$

$$-x^{2}+3x+7=7$$

$$-x^{2}+3x=0$$

$$x(3-x)=0$$

A két gyök: 0 és 3. Ebből 0 jó megoldás, a 3 nincs benne az intervallumban.

### 3. eset (2≤x<5) $x^{2}-4x-5$<0 x-2≥0

$$-x^{2}+4x+5+x-2=7$$

$$-x^{2}+5x+-3=7$$

$$-x^{2}+5x+-4=0$$

$$\frac{-5\pm \sqrt{25-16}}{-2}$$

x1=4 valódi megoldás
x2=1 nincs benne az intervallumban ezért hamis gyök.

### 4. eset (5≤x) $x^{2}-4x-5$≥0 x-2≥0

$$x^{2}-4x-5+x-2=7$$

$$x^{2}-3x-7=7$$

$$x^{2}-3x-14=0$$

$$\frac{3\pm \sqrt{9+56}}{2}$$

A második gyök biztosan nem megoldás (nincs benne az intervallumban).

x1= $\frac{3\pm \sqrt{65}}{2}$ megoldás.

### Összes megoldás

0, 4, $\frac{5-\sqrt{65}}{2}$, $\frac{3\pm \sqrt{65}}{2}$

## $$\left|x^{2}+3x\right|=\left|2x-6\right|$$

$x^{2}+3x$ zérushelyei: 0, -3

$2x-6$ zérushelye: 3

### 1. eset = 3. eset (x<-3 ∨ x≤x<3) $x^{2}+3x$≥0$ 2x-6$ ≤0

$$x^{2}+3x= -2x+6$$

$$x^{2}+5x-6=0$$

x1 = 1 jó megoldás a harmadik esetben.

x2 = -6 jó megoldás az első esetben.

### 2. eset ~ 4. eset ()

Hasonlít a 4. esetre, pedig nem egyformák.

Megoldás: Nincs valós gyök. (ℂ)

### Összes megoldás

1, -6

## $$\left|2x-1\right|<\left|x-1\right|$$

2x-1 zérushelye: 0.5

x-1 zérushelye: 1

Nem szabad összevonni az 1. és a 3. esetet!

### 1. eset (x<0.5)

$$-2x+1<-x+1$$

x>0 (Fordul a reláció iránya, emrt -1-gyel szoroztunk!)

Megoldás: x∈(0,0.5) (nyílt intervallum)

### 2. eset (0.5≤x<1)

2x-1≥0
x-1<0
2x-1<-x+1
3x<2
x<2/3

Megoldás: x∈[0.5, 2/3)

### 3. eset (1≤x)

2x-1≥0
x-1≥0
2x-1<x-1
x<0
A megoldás: ∅

### Összes megoldás

x∈[0.5, 2/3) ∪ (0,0.5) = x∈(0, 2/3)