A	B	C	Σ	J:

NÉV: ______________________________ ELTE AZON.: ______________

Prog. inf. I. (BSc.) **4. vizsgadolgozat** *2012. január 25.*

Első rész (75 perc)

A. *Minden feladatban írjuk be a megfelelő választ a sor végén levő keretbe. Csak az eredmény lesz pontozva. Minden helyes válasz 1 pontot ér. Az elégségeshez legalább 6 pontot kell szerezni ebből a feladatból.* (15 *pont*)

1. Legalább hány eleme van $\mathbb{R}^3$ egy generátorrendszerének, ha az tartalmazza az $[1\ \ 0\ \ 0]^\top$, $[2\ \ 0\ \ 0]^\top$ és $[3\ \ 0\ \ 0]^\top$ vektorokat?

   legalább 5

2. Az $\mathbb{R}^7$ vektortérben álljon V_1 azokból a vektorokból, melyeknek első két komponense 0, V_2 pedig azokból, melyeknek utolsó két komponense 0. Hány dimenziós a $V_1 \cap V_2$ altér?

   $\dim(V_1 \cap V_2) = 3$

3. Hány megoldása lehet egy 4 egyenletből álló 3 ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszernek?

   1 vagy ∞

4. Hány olyan vektor van $\mathbb{R}^4$-ben, melynek egyik komponense 1, egy másik komponense -1, a maradék két komponense pedig 0?

   12

5. Legfeljebb hány lineárisan független vektort lehet kiválasztani az előző feladatban szereplő vektorok közül?

   legfeljebb 3-at

6. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg az A^2 mátrix rangját.

   $\rho(A^2) = 1$

7. Írjuk fel az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix egy $A^{(b)}$ bal oldali inverzét.

   pl. $A^{(b)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. Az $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mátrix determinánsa 4. A B mátrixot úgy kapjuk, hogy az A mátrixban az első és a negyedik oszlopot egymással felcseréljük. Mennyi az $A + B$ mátrix determinánsa?

   $|A + B| = 0$

9. Az $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrix determinánsa 3. Mennyi a $3A$ mátrix determinánsa?

   $|3A| = 81$

10. Az $\begin{bmatrix} a & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & c \end{bmatrix}$ mátrixnak a $\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektor jobb oldali sajátvektora. Határozzuk meg a és c értékét.

    $a = 5$, $c = 0$

11. Számítsuk ki az $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixhoz tartozó Q kvadratikus alak értékét a $\mathbf{v} = [2\ \ 1]^\top$ vektoron.

    $Q(\mathbf{v}) = 14$

12. Számítsuk ki a $\mathbf{v} = [1 \quad 2+i \quad 3-i]^\top \in \mathbb{C}^3$ vektor euklideszi normáját az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^* \mathbf{x}$ skaláris szorzatra nézve.

    $||\mathbf{v}|| = 4$

13. Mely n, k pozitív egész számokra igaz, hogy $\mathbb{R}^n$-nek van $\mathbb{R}^k$-val izomorf altere?

    ha $k \leq n$

14. Tekintsük azt a $\varphi = \mathcal{H}om(\mathbb{R}^{18}, \mathbb{R}^{18})$ lineáris transzformációt, amely minden vektorhoz az ellentettjét rendeli. Hány dimenziós φ képtere?

    $\dim \mathcal{I}m\, \varphi = 18$

15. Egészítsük ki az alábbi mondatot úgy, hogy egy igaz állítást kapjunk. „Egy $\mathbb{C}$ feletti V vektortéren értelmezett $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \to \mathbb{C}$ bilineáris alak pontosan akkor Hermite-féle, ha a hozzá tartozó $\mathcal{Q}$ kvadratikus alak ...."

    minden értéke valós

B. *Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket. A kimondandó állításokat nem kell bizonyítani. Ügyeljünk a pontos fogalmazásra. Minden teljes válasz* 2 *pontot ér. Az elégségeshez legalább* 4 *pontot kell szerezni ebből a feladatból.* (10 *pont*)

16. Definiáljuk, mit jelent, hogy egy $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer lineárisan összefüggő.

    Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer lineárisan összefüggő, ha léteznek $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ valós számok, nem mind 0, hogy $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$.

17. Definiáljuk egy $\mathbb{R}$ feletti mátrix sorrangjának fogalmát.

    Az $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrix sorrangja az $A^\top \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix oszloprangja, vagyis az A mátrix transzponáltjának oszlopaiból álló $\mathbb{R}^m$-beli vektorrendszer rangja.

18. A sajátvektor fogalmának segítségével mondjuk ki annak szükséges és elégséges feltételét, hogy az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix diagonalizálható legyen $\mathbb{R}$ felett.

    A pontosan akkor diagonalizálható $\mathbb{R}$ felett, ha létezik $\mathbb{R}^n$-ben az A sajátvektoraiból álló bázis.

19. Mondjuk ki a V euklideszi tér $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vektoraira érvényes háromszögegyenlőtlenséget.

    $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$, ahol $||\mathbf{v}||$ a $\mathbf{v} \in V$ vektor euklideszi normája.

20. Definiáljuk az $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ szimmetrikus mátrix karakterisztikus sorozatának Δ_2 elemét.

    $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

Az elégségeshez a dolgozat második részével együtt legalább 15 *pontot kell szerezni.*

NÉV: ______________________________ ELTE AZON.: ______________

Prog. inf. I. (BSc.) **4. vizsgadolgozat/3** *2012. január 25.*

Második rész (45 perc)

C. *Bizonyítsuk az alábbi állításokat. Ügyeljünk a pontos fogalmazásra. Ebben a részben nincs minimumkövetelmény az elégségeshez.*

21. Mondjuk ki és igazoljuk a geometriai vektorok vektoriális szorzatának $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$-beli koordinátákból való kiszámítására vonatkozó képletet. (4 *pont*)

22. Mondjuk ki és bizonyítsuk be azt a tételt, amely egy valós mátrix rangját összekapcsolja bizonyos részmátrixainak determinánsával. (6 *pont*)

A hátlapra!

Ha az I. rész két kérdéscsoportjából a megszerzett pontszám eléri a 6-ot, illetve a 4-et akkor a dolgozat érdemjegye az összpontszám alapján:

$0-14$:	1
$15-18$:	2
$19-22$:	3
$23-26$:	4
$27-35$:	5

EREDMÉNYHIRDETÉS: január 26-án, csütörtökön 10 és 12 között a Déli tömb 3-708-as szobájában. Ezt követően a vizsgadolgozatok Szalay tanár úrtól vehetők át a vizsgaidőszakban minden héten kedden, szerdán vagy csütörtökön délelőtt.