A	B	C	Σ	J:

NÉV: ______________________ ELTE AZON.: ____________

Prog. inf. I. (BSc.) **3. vizsgadolgozat** *2012. január 18.*

Első rész (75 perc)

A. *Minden feladatban írjuk be a megfelelő választ a sor végén levő keretbe. Csak az eredmény lesz pontozva. Minden helyes válasz* 1 *pontot ér. Az elégségeshez legalább* 6 *pontot kell szerezni ebből a feladatból.* (15 *pont*)

1. Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben három vektort, melyek közül bármely kettő lineárisan független.

   pl. $[0\ \ 1]^\top$, $[1\ \ 0]^\top$, $[1\ \ 1]^\top$

2. Írjuk fel a $\mathbf{w} = [1\ \ 2\ \ 3]^\top$ vektort az $\mathbf{u} = [3\ \ 2\ \ 1]^\top$ és a $\mathbf{v} = [2\ \ 2\ \ 2]^\top$ vektorok lineáris kombinációjaként.

   $\mathbf{w} = (-1)\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$

3. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4 \in \mathbb{R}^6$ vektorokról tudjuk, hogy az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ és a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ vektorrendszer is lineárisan független. Mennyi lehet az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ vektorrendszer rangja?

   4, 5 vagy 6

4. Mennyi lehet a $C \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mátrix rangja, ha C^2 rangja 2?

   C rangja is 2

5. Hány megoldása lehet egy 4 egyenletből álló 3 ismeretlenes lineáris egyenletrendszernek?

   0, 1 vagy ∞

6. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times2}$. Számítsuk ki az A^*A mátrixot.

   $A^*A = \begin{bmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 2 \end{bmatrix}$

7. Zárójelezzük úgy az $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ kifejezést, hogy az így kapott vektor tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ geometriai vektorok esetén merőleges legyen $\mathbf{a}$-ra.

   $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

8. Mennyi a determinánsa annak a 3×3-as mátrixnak, melynek minden eleme 3?

   0

9. Adjunk meg $\mathbb{R}^{4\times4}$ elemein egy olyan rangtartó átalakítást, amely nem feltétlenül determinánstartó.

   pl. a mátrix minden elemét megszorozzuk 2-vel

10. Számítsuk ki a $V_4(1, 2, 3, 5)$ Vandermonde-determinánst.

    $V_4(1, 2, 3, 5) = 48$

11. Írjunk fel egy diagonális mátrixot, amely $\mathbb{R}$ felett hasonló a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixhoz.

    pl. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

12. Számítsuk ki a $\mathbf{v} = [-1\ \ 1\ \ 3\ \ 5]^\top \in \mathbb{R}^4$ vektor euklideszi normáját az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$ skaláris szorzatra nézve.

$||\mathbf{v}|| = 6$

13. Mely c valós számokra lesz a $\begin{bmatrix} c & 1 \\ 1 & c \end{bmatrix}$ mátrixhoz tartozó kvadratikus alak pozitív definit?

ha $c > 1$

14. Tekintsük azt a $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ lineáris transzformációt, amelyre $\varphi([1\ \ 2]^\top) = [1\ \ 2]^\top$ és $\varphi([1\ \ 3]^\top) = [3\ \ 1]^\top$. Számítsuk ki a $\varphi([1\ \ 4]^\top)$ vektort.

$\varphi([1\ \ 4]^\top) = [5\ \ 0]^\top$

15. Tekintsük azt a $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ lineáris transzformációt, amelyre $\varphi([x\ \ y\ \ z]^\top) = [x-y\ \ x-y\ \ 0]^\top$ teljesül minden valós x, y, z esetén. Hány dimenziós φ magtere?

$\dim \mathcal{K}er\,\varphi = 2$

B. *Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket. A kimondandó állításokat nem kell bizonyítani. Ügyeljünk a pontos fogalmazásra. Minden teljes válasz* 2 *pontot ér. Az elégségeshez legalább* 4 *pontot kell szerezni ebből a feladatból.* (10 *pont*)

16. Definiáljuk egy $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix jobb oldali inverzének fogalmát.

Egy $A^{(j)}$ mátrix jobb oldali inverze A-nak, ha $A^{(j)} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ és $AA^{(j)} = I_m$, ahol I_m az $m \times m$-es egységmátrix.

17. Definiáljuk három geometriai vektor vegyes szorzatát.

Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ geometriai vektorok vegyes szorzata „$\mathbf{abc}$”$=(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$.

18. Írjuk fel az $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixban az A_{23} előjelezett aldetermináns értékét.

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}.$$

19. A determináns fogalmának segítségével mondjuk ki annak szükséges és elégséges feltételét, hogy egy n egyenletből álló n ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszernek legyen nemtriviális megoldása.

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek pontosan akkor van nemtriviális megoldása, ha $|A| = 0$.

20. Egy alkalmas determináns segítségével mondjuk ki annak szükséges és elégséges feltételét, hogy a λ_0 valós szám (jobb oldali) sajátértéke legyen az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak.

λ_0 pontosan akkor sajátértéke A-nak, ha $|A - \lambda_0 I_n| = 0$, ahol I_n az $n \times n$-es egységmátrix.

Az elégségeshez a dolgozat második részével együtt legalább 15 *pontot kell szerezni.*

NÉV: ______________________________ ELTE AZON.: ______________

Prog. inf. I. (BSc.) **3. vizsgadolgozat/3** *2012. január 18.*

Második rész (45 perc)

C. *Bizonyítsuk az alábbi állításokat. Ügyeljünk a pontos fogalmazásra. Ebben a részben nincs minimumkövetelmény az elégségeshez.*

21. Legyen W_1 és W_2 altér $\mathbb{R}^n$-ben. Igazoljuk, hogy $W_1 \cap W_2$ is altér $\mathbb{R}^n$-ben. (3 *pont*)

22. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a lineáris leképezésekre vonatkozó dimenzióösszefüggést. (7 *pont*)

A hátlapra!

Ha az I. rész két kérdéscsoportjából a megszerzett pontszám eléri a 6-ot, illetve a 4-et akkor a dolgozat érdemjegye az összpontszám alapján:

$0 - 14:$	1
$15 - 18:$	2
$19 - 22:$	3
$23 - 26:$	4
$27 - 35:$	5

EREDMÉNYHIRDETÉS: január 18-án, szerdán 17 órakor a Déli tömb 3-709-es szobájában. Ezt követően a vizsgadolgozatok Szalay tanár úrtól vehetők át a vizsgaidőszakban minden héten kedden, szerdán vagy csütörtökön délelőtt.