A	B	C	Σ	J:

NÉV: ____________________ ELTE AZON.: ____________

Prog. inf. I. (BSc.) **2. vizsgadolgozat** *2012. január 11.*

Első rész (75 perc)

A. *Minden feladatban írjuk be a megfelelő választ a sor végén levő keretbe. Csak az eredmény lesz pontozva. Minden helyes válasz* 1 *pontot ér. Az elégségeshez legalább* 6 *pontot kell szerezni ebből a feladatból.* (15 *pont*)

1. Mondjunk $\mathbb{R}^2$-ben egy generátorrendszert, ami nem bázis.

   Pl. $[1 \quad 0]^T, [0 \quad 1]^T, [1 \quad 1]^T$

2. Mennyi lehet a $V \leq \mathbb{R}^9$ altér dimenziója, ha van benne 7 elemű lineárisan független vektorrendszer és 8 elemű lineárisan összefüggő rendszer.

   $\dim V$ lehet: 7, 8 vagy 9.

3. Hogyan változhat egy vektorrendszer rangja, ha a rendszer egyik vektorát elhagyjuk a rendszerből?

   Nem változik vagy 1-gyel csökken.

4. Adjunk meg egy olyan inhomogén lineáris egyenletrendszert, melynek két ismeretlenje, három egyenlete és végtelen sok megoldása van.

   Pl. $\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \\ 3x & + & 3y & = & 3 \end{array}$

5. Mutassunk példát olyan 2×2-es valós elemű nem nulla mátrixra, melynek a négyzete a nulla mátrix.

   Pl. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. Hány $2 \leq k \leq 6$ szám esetén lesz a $k, k-1, \ldots, 2, 1$ permutációban páros sok inverzió?

   Ilyen k-k száma: 2

7. Az $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ mátrix determinánsa 3. Mennyi lesz a $B = \begin{bmatrix} a & -2d & g \\ b & -2e & h \\ c & -2f & i \end{bmatrix}$ mátrix determinánsa?

   $|B| = -6$

8. Mutassunk példát olyan 3×3-as nem nulla mátrixra, melynek minden 2×2-es aldeterminánsa 0.

   Pl. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

9. Határozzuk meg a $\mathbf{v} = (((\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{i}) \times \mathbf{i}) \times \mathbf{i}$ vektor értékét.

   $\mathbf{v} = -\mathbf{j}$

10. Legyen A a sík $y = x$ tengelyre való tükrözésének a mátrixa a triviális bázisban. Milyen lesz az A-hoz tartozó Q kvadratikus alak jellege (definitsége)?

    Q indefinit.

11. Legyen φ a szokásos háromdimenziós térben, $\mathbb{R}^3$-ben az x-y-síkra való vetítés, ψ pedig a z tengely körüli 90°-os forgatás. Hány dimenziós a $\psi\varphi$ lineáris transzformációnak a magtere?

$\dim \mathcal{K}er(\psi\varphi) = 1$

12. Legyen $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezés, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathbb{R}^4$ pedig három lineárisan független vektor, melyekre $\varphi(\mathbf{u}_1) = \varphi(\mathbf{u}_2) = \varphi(\mathbf{u}_3) \neq \mathbf{0}$. Hány dimenziós lehet $\mathcal{I}m\,\varphi$?

$\dim \mathcal{I}m\,\varphi$ lehet: $1, 2$

13. Hány olyan $\mathbf{v} = [\,v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4\,]^T \in \mathbb{R}^4$ vektor létezik, melyre $\|\mathbf{v}\| = 2$ (az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$ skaláris szorzatra nézve), és melyre $v_i \in \{0, 1, -1\}$ minden $1 \leq i \leq 4$ esetén?

Vektorok száma: 16

14. Határozzuk meg az $\mathbf{a} = [\,-1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\,]^T$, valamint a $\mathbf{b} = [\,-1 \quad -1 \quad -1 \quad -1\,]^T$ vektorok $\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ hajlásszögét $\mathbb{R}^4$-ben (az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$ skaláris szorzatra nézve).

$\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 120°$

15. Tegyük föl, hogy az $\mathcal{A}$ bilineáris alak mátrixa az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ bázisban $[\mathcal{A}]^{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Mi lesz az $\mathcal{A}$ mátrixa az $\{\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\}$ bázisban?

$[\mathcal{A}]^{\mathbf{e}'} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

B. *Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket. A kimondandó állításokat nem kell bizonyítani. Ügyeljünk a pontos fogalmazásra. Minden teljes válasz 2 pontot ér. Az elégségeshez legalább 4 pontot kell szerezni ebből a feladatból.* (10 *pont*)

16. Definiáljuk egy $V \leq \mathbb{R}^n$ altér bázisának fogalmát.

A $\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_k \in V$ vektorok bázist alkotnak V-ben, ha lineárisan függetlenek, és V minden eleme előáll a $\mathbf{b}_i$-k lineáris kombinációjaként.

17. Definiáljuk az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ geometriai vektorok vektoriális szorzatát, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$-t.

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ az a vektor, melyre igaz, hogy:
(i) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (ahol $\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által közbezárt szöget jelenti);
(ii) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$;
(iii) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jobbrendszert alkotnak (feltéve hogy a vektoriális szorzat nem nulla).

18. Definiáljuk egy $\varphi \in \mathcal{H}om(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ lineáris transzformáció sajátvektorának fogalmát.

Egy $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ vektor sajátvektora φ-nek, ha $\mathbf{u} \neq 0$, és $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda_0\mathbf{u}$ valamilyen $\lambda_0 \in \mathbb{R}$-re.

19. Mondjuk ki a determinánsok szorzástételét.

Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor az AB szorzatmátrix determinánsa megegyezik az A és B mátrixok determinánsának szorzatával, azaz $|AB| = |A| \cdot |B|$.

20. Mondjuk ki a valós szimmetrikus mátrixok spektráltételét.

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak pontosan akkor létezik sajátvektorokból álló ortonormált bázisa, ha A szimmetrikus.

Az elégségeshez a dolgozat második részével együtt legalább 15 *pontot kell szerezni.*

NÉV: ____________________ ELTE AZON.: ____________

Prog. inf. I. (BSc.) **2. vizsgadolgozat/3** *2012. január 11.*

Második rész (45 perc)

C. *Bizonyítsuk az alábbi állításokat. Ügyeljünk a pontos fogalmazásra. Ebben a részben nincs minimumkövetelmény az elégségeshez.*

21. Legyen A nem üres részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek. Definiáljuk az A által generált altér, $\mathrm{Span}(A)$ fogalmát, majd igazoljuk, hogy $\mathrm{Span}(A) = W(A)$, ahol $W(A)$ az A elemeitől lineárisan függő vektorok altere $\mathbb{R}^n$-ben. (4 *pont*)

22. Definiáljuk a Vandermonde-determináns fogalmát, majd bizonyítsuk be az értékére adható explicit képletet. (6 *pont*)

A hátlapra!

Ha az I. rész két kérdéscsoportjából a megszerzett pontszám eléri a 6-ot, illetve a 4-et, akkor a dolgozat érdemjegye az összpontszám alapján:

0 – 14 :	1
15 – 18 :	2
19 – 22 :	3
23 – 26 :	4
27 – 35 :	5

EREDMÉNYHIRDETÉS: január 11-én, szerdán 16 órakor a Déli tömb 3-709-es szobájában. Ezt követően a vizsgadolgozatok Szalay tanár úrtól vehetők át a vizsgaidőszakban minden héten kedden, szerdán vagy csütörtökön délelőtt.