A	B	C	Σ	J:

NÉV: ______________________ ELTE AZON.: ____________

Prog. inf. I. (BSc.) **1. vizsgadolgozat** *2012. január 4.*

Első rész (75 perc)

A. *Minden feladatban írjuk be a megfelelő választ a sor végén levő keretbe. Csak az eredmény lesz pontozva. Minden helyes válasz* 1 *pontot ér. Az elégségeshez legalább* 6 *pontot kell szerezni ebből a feladatból.* (15 *pont*)

1. Hány különböző módon tudjuk előállítani az $[1 \quad 1]^T$ vektort az $[1 \quad 2]^T$, az $[1 \quad 3]^T$ és az $[1 \quad 4]^T$ vektorok lineáris kombinációjaként?

   ∞ sok módon

2. Hány eleme lehet egy $\mathbb{R}^5$-beli nem üres lineárisan független vektorhalmaznak, melynek minden vektorában a komponensek összege 0?

   1, 2, 3 vagy 4

3. Legyen $V \subseteq \mathbb{R}^n$ altér, $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ bázis V-ben, és legyen a $\mathbf{v} \in V$ vektornak az adott bázisban fölírt koordinátavektora $[1 \quad 2 \quad \cdots \quad k]^T$. Mi lesz ugyanezen vektor első két koordinátája a $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ bázisban?

   Új koordináták: 1, 1

4. Hány megoldása lehet egy homogén lineáris egyenletrendszernek, ha a rendszernek 3 egyenlete és 4 ismeretlenje van?

   Megoldások száma: ∞

5. Vegyük azokat a vektorokat $\mathbb{R}^5$-ben, melyeknek minden komponense 0 vagy 1. Hány dimenziós az általuk generált altér?

   5

6. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg az A^5 mátrixot.

   $A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. Hogyan változik egy 4×4-es mátrix determinánsa, ha a mátrixot tükrözzük a függőleges szimmetriatengelyére?

   Nem változik.

8. Egy 4×4-es valós elemű mátrix determinánsa 0, továbbá egyik (3×3-as) előjelezett aldeterminánsa sem nulla. Mennyi a mátrix rangja?

   3

9. Adjunk meg egy olyan nem nulla $\mathbf{c}$ geometriai vektort, amely merőleges az $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ és a $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ vektorokra.

   Pl. $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

10. Az 12345 számok $32p4q$ permutációjában az inverziók száma páros. Mi a p és a q értéke?

    $p = 5$, $q = 1$

11. Az $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixnak jobb oldali sajátvektora az $\mathbf{e}_1 = [1 \quad 0 \quad 0]^T$ vektor, és a hozzá tartozó sajátérték (-2). Határozzuk meg az A mátrix első oszlopát.

    $[A]_1 = [-2 \quad 0 \quad 0]^T$

12. Vegyük azt a $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ lineáris leképezést, melynél φ minden vektorhoz hozzárendeli a vektor komponenseinek az öszegét. Határozzuk meg $\mathcal{K}er\,\varphi$ dimenzióját.

   $\dim \mathcal{K}er\,\varphi =$ 4

13. Mi azon lineáris transzformáció triviális bázisban vett mátrixának determinánsa, mely az $\mathbb{R}^4$ minden eleméhez a (-1)-szeresét rendeli?

   A determináns: 1

14. Ha egy valós euklideszi térben az **a** vektor normája 2, a **b** vektor normája pedig 5, akkor milyen értékeket vehet föl az $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektor normája?

   $3 \leq \|a+b\| \leq 7$

15. Az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ bilineáris függvény mátrixa a triviális bázisban $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Mi az $\mathcal{A}$-hoz tartozó Q kvadratikus alak értéke a $\mathbf{v} = [1 \quad 1]^T$ vektoron?

   $Q(\mathbf{v}) =$ 6

B. *Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket. A kimondandó állításokat nem kell bizonyítani. Ügyeljünk a pontos fogalmazásra. Minden teljes válasz* 2 *pontot ér. Az elégségeshez legalább* 4 *pontot kell szerezni ebből a feladatból.* (10 *pont*)

16. Definiáljuk, mit jelent, hogy egy $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer lineárisan független.

   Az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer lineárisan független, ha a vektorrendszernek csak a triviális lineáris kombinációja adja a nullvektort.

17. Definiáljuk egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix i-edik sorának j-edik eleméhez tartozó A_{ij} előjelezett aldeterminánst.

   Ha B_{ij} az a mátrix, amit úgy kapunk, hogy az A mátrixnak elhagyjuk az i-edik sorát és a j-edik oszlopát, akkor $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det B_{ij}$.

18. Mit jelent, hogy két $\mathbb{R}^{n\times n}$-beli mátrix, A és B hasonló egymáshoz $\mathbb{R}$ fölött?

   $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pontosan akkor hasonlók egymáshoz $\mathbb{R}$ fölött, ha van olyan $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertálható mátrix, melyre $B = D^{-1}AD$.

19. A dimenzió fogalmának segítségével mondjuk ki annak szükséges és elégséges feltételét, hogy két $\mathbb{R}$ fölötti véges dimenziós vektortér izomorf legyen.

   Legyenek U és V véges dimenziós vektorterek $\mathbb{R}$ fölött. U és V akkor és csak akkor izomorfak, ha $\dim U = \dim V$.

20. Mondjuk ki a szokásos geometriai vektorok vektoriális szorzatára vonatkozó kifejtési tételt.

   Ha $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ geometriai vektorok, akkor $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$.

Az elégségeshez a dolgozat második részével együtt legalább 15 *pontot kell szerezni.*

NÉV: ____________________________ ELTE AZON.: ________________

Prog. inf. I. (BSc.) **1. vizsgadolgozat/3** *2012. január 4.*

Második rész (45 perc)

C. *Bizonyítsuk az alábbi állításokat. Ügyeljünk a pontos fogalmazásra. Ebben a részben nincs minimumkövetelmény az elégségeshez.*

21. Mondjuk ki a mátrixok transzponálása és az egyéb mátrixműveletek közötti kapcsolatot, és igazoljuk ezek közül a szorzat transzponáltjára vonatkozó állítást. (4 *pont*)

22. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok, akkor $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineárisan függetlenek. (6 *pont*)

A hátlapra!

Ha az I. rész két kérdéscsoportjából a megszerzett pontszám eléri a 6-ot, illetve a 4-et, akkor a dolgozat érdemjegye az összpontszám alapján:

$0-14:$	1
$15-18:$	2
$19-22:$	3
$23-26:$	4
$27-35:$	5

EREDMÉNYHIRDETÉS: január 4-én, szerdán 16 órakor a Déli tömb 3-709-es szobájában. Ezt követően a vizsgadolgozatok Szalay tanár úrtól vehetők át a vizsgaidőszakban minden héten kedden, szerdán vagy csütörtökön délelőtt.