A	B	C	Σ	J:

NÉV: ______________________ ELTE AZON.: ____________

Prog. inf. I. (BSc.) **Minta vizsgadolgozat** *2012. január 0.*

Első rész (75 perc)

A. *Minden feladatban írjuk be a megfelelő választ a sor végén levő keretbe. Csak az eredmény lesz pontozva. Minden helyes válasz* 1 *pontot ér. Az elégségeshez legalább* 6 *pontot kell szerezni ebből a feladatból.* (15 *pont*)

1. Hány különböző lineáris kombinációja van két lineárisan független vektornak $\mathbb{R}^5$-ben?

   ∞

2. Mi hányzik az alábbi állításból, hogy annak egy ekvivalens megfogalmazását kapjuk, hogy $U \subseteq \mathbb{R}^5$ altér $\mathbb{R}^5$-ben:
   $U \subseteq \mathbb{R}^5$ nem üres halmaz pontosan akkor altér, ha $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ esetén $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$, és …

   $\mathbf{u} \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda\mathbf{u} \in U$

3. Adjunk meg egy $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ vektort úgy, hogy $\mathbf{v}$-t hozzávéve az $\{[1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T, [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T, [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T\}$ vektorhalmazhoz, bázist kapjunk $\mathbb{R}^4$-ben.

   Pl. $[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$.

4. Mennyi lehet a rangja egy olyan 3×4-es valós elemű nem nulla mátrixnak, melynek i-edik sorában ($1 \leq i \leq 3$ esetén) pontosan i darab nem nulla elem van, és a harmadik sor az első két sor összege?

   2

5. Mondjunk példát 3 dimenziós altérre $\mathbb{R}^5$-ben.

   Pl. $\{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^5 \mid a_4 = a_5 = 0\}$.

6. Az A és B mátrixok AB szorzata létezik és 4×7-es, továbbá mind az A-nak, mind a B-nek kevesebb sora van, mint oszlopa. Hány oszlopa lehet A-nak?

   5 vagy 6.

7. Mi az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldása, ha A négyzetes, és létezik neki inverze?

   $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

8. Mondjunk legalább egy, a mátrixokon végrehajtható rangtartó átalakítást.

   Sorcsere.

9. Mi lesz a $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ és a $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ vektorok vektoriális szorzata, $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$?

   $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

10. Hány inverzió van 5 elem „fordított” sorbarendezésében (azaz az 54321 permutációban)?

    10

11. Számoljuk ki az $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix második sorának harmadik eleméhez tartozó előjelezett aldeterminánst.

    $A_{23} = -2$

12. Legyen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, melynek determinánsa -2. Mi lesz $\det 3A^2$?

$\det 3A^2 = \; 3^3(-2)^2 = 108$

13. Legyen φ a sík tükrözése egy origón átmenő egyenesre, és legyen A a φ mátrixa valamely bázisban. Mik az A mátrix sajátértékei?

Sajátértékek: $1, -1$

14. Legyen a φ lineáris transzformáció mátrixa (valamely bázisban) diagonalizálható, és tegyük föl, hogy φ karakterisztikus polinomja $k_\varphi(x) = x^6 + ax^4 + x^2$ valamely $a \in \mathbb{R}$ értékre. Hány dimenziós φ képtere?

$\dim \mathcal{I}m\, \varphi = \; 4$

15. Mi lehet a $c \in \mathbb{R}$ konstans értéke, ha a szokásos $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ euklideszi struktúrára nézve a $\mathbf{v} = (1\ 2\ 3\ c)^T \in \mathbb{R}^4$ vektor normája 4?

$c = \; \pm\sqrt{2}$

B. *Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket. A kimondandó állításokat nem kell bizonyítani. Ügyeljünk a pontos fogalmazásra. Minden teljes válasz* 2 *pontot ér. Az elégségeshez legalább* 4 *pontot kell szerezni ebből a feladatból.* (10 *pont*)

16. Definiáljuk egy $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorrendszer rangját.

A $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

17. Írjuk föl az $A \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ és a $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix $C = AB$ szorzatában a harmadik sor ötödik elemének a képletét.

$${}_3[C]_5 = \sum_{j=1}^{m} {}_3[A]_{j\,j}[B]_5$$

18. Mondjuk ki a determinánsok szorzástételét.

Ha A és B négyzetes mátrixok, melyeknek a szorzata, AB létezik, akkor $\det(AB) = \det A \det B$.

19. Mit jelent, hogy egy V euklideszi térben az U és W alterek ortogonálisak egymásra?

U és W pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha minden $\mathbf{u} \in U$ és minden $\mathbf{w} \in W$ vektor merőleges egymásra: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$.

20. Mondjuk ki a lineáris leképezések egyértelmű kiterjesztési tételét.

Ha $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ bázis $\mathbb{R}^n$-ben, $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ pedig tetszőleges vektorok $\mathbb{R}^k$-ban, akkor létezik pontosan egy $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ lineáris leképezés, melyre $\varphi(\mathbf{a}_i) = \mathbf{b}_i$ $(1 \le i \le n)$.

Az elégségeshez a dolgozat második részével együtt legalább 15 *pontot kell szerezni.*

NÉV: ______________________________ ELTE AZON.: ______________

Prog. inf. I. (BSc.) **Minta vizsgadolgozat/3** *2012. január 0.*

Második rész (45 perc)

C. *Bizonyítsuk az alábbi állításokat. Ügyeljünk a pontos fogalmazásra. Ebben a részben nincs minimumkövetelmény az elégségeshez.*

21. Igazoljuk, hogy ha egy lineárisan független vektorrendszerhez hozzáveszünk egy új vektort, és az így kapott rendszer lineárisan összefüggő, akkor az új vektor lineárisan függ a többi vektortól. (4 *pont*)

22. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a valós euklideszi terekre érvényes Cauchy-egyenlőtlenséget. (6 *pont*)

A hátlapra!

Ha az I. rész két kérdéscsoportjából a megszerzett pontszám eléri a 6-ot, illetve a 4-et akkor a dolgozat érdemjegye az összpontszám alapján:

0 – 14 :	1
15 – 18 :	2
19 – 22 :	3
23 – 26 :	4
27 – 35 :	5

EREDMÉNYHIRDETÉS: január 0-án, pénteken 0 órakor a Déli tömb 11-111-es szobájában. Ezt követően a vizsgadolgozatok Szalay tanár úrtól vehetők át a vizsgaidőszakban minden héten kedden, szerdán vagy csütörtökön délelőtt.