| 1 | 2 | 3 | $\Sigma_1$ | 4 | $\Sigma$ | **J:** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

NÉV: ______________________ ELTE AZON.: __________

*Prog. inf. I. (BSc.)* **3. vizsgadolgozat (lin. alg.)** *2010. január 22.*

**I. rész (75 perc):** *Az I. rész összpontszáma 32. A válaszokat itt (az I. részben) nem kell indokolni!*

**1.** Állapítsuk meg, igazak-e az alábbi állítások, és tegyünk X-et a megfelelő kockába. (A választ nem kell indokolni!) (8 *pont*)

| | Igen | Nem |
|---|---|---|
| a) Ha az $U \subseteq \mathbb{R}^3$ halmaz zárt a vektorok összeadására, akkor $U$ altér $\mathbb{R}^3$-ben. | ☐ | ☐ |
| b) $\mathbb{R}^5$-nek egy tetszőleges nem nulla alterében van ötelemű generátorrendszer. | ☐ | ☐ |
| c) $\mathbb{R}^5$ bármely két alterének a metszete is és az uniója is altér. | ☐ | ☐ |
| d) Ha az $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixokra $AB = BA$, akkor $A^T B^T = B^T A^T$. | ☐ | ☐ |
| e) Ha egy $n \times n$-es mátrix minden eleme pozitív egész szám, akkor a mátrix determinánsa is pozitív egész. | ☐ | ☐ |
| f) Ha egy $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció magtere csak a nulla vektort tartalmazza, akkor $\varphi$ injektív. | ☐ | ☐ |
| g) Egy $2\times 2$-es valós mátrix pontosan akkor diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött, ha van két különböző sajátértéke. | ☐ | ☐ |
| h) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ és $\mathbb{R}^4$ izomorfak mint $\mathbb{R}$ fölötti vektorterek. | ☐ | ☐ |

**2.** Az alábbi feladat minden részében karikázzuk be a sor végén az egyetlen helyes válasz betűjelét. (8 *pont*)

a) Ha egy $U \le \mathbb{R}^n$ altérnek van 5 elemű generátorrendszere, akkor: (A) $5 \ge n$; (B) $5 \le n$; (C) $5 = n$; (D) a fentiek közül egyik sem következik. (A) (B) (C) (D)

b) A geometriai vektorok vektoriális szorzatára igaz, hogy bármely $\mathbf{a}, \mathbf{b}$-re: (A) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$; (B) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ lineárisan függetlenek; (C) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ akkor és csak akkor a nullvektor, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek egymásra; (D) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ akkor és csak akkor a nullvektor, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamosak egymással. (A) (B) (C) (D)

c) $M \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ tetszőleges négyzetes mátrix esetén: (A) $\rho(2M) = \rho(M)$; (B) $\rho(M^2) = \rho(M)$; (C) $\rho(M)$ akkor és csak akkor nem nulla, ha $M$ invertálható; (D) $\rho(M)$ akkor és csak akkor nem nulla, ha $\det M$ nem nulla. (A) (B) (C) (D)

d) Egy $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mátrix determinánsa nem változik, ha: (A) egyik sorát beszorozzuk $(-1)$-gyel; (B) az egész mátrixot beszorozzuk $(-1)$-gyel; (C) megcseréljük az első két sorát; (D) az utolsó sort az első sorba visszük, a többi sort pedig egy sorral lejjebb csúsztatjuk. (A) (B) (C) (D)

e) Legyen $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tetszőleges mátrix. Ekkor: (A) $M$ sajátvektorai alteret alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben; (B) $M$ sajátvektorai és a nullvektor alteret alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben; (C) $M$ sajátértékei alteret alkotnak $\mathbb{R}$-ben; (D) a fentiek közül egyik sem feltétlenül igaz. (A) (B) (C) (D)

f) Legyen $\varphi$ az $\mathbb{R}^3$ tér tükrözése egy origón átmenő síkra. Ekkor: (A) $\varphi$ nem injektív; (B) $\varphi$-nek sajátértéke a nulla; (C) létezik a térnek $\varphi$ sajátvektoraiból álló bázisa; (D) $\varphi^2$ minden vektort a nullvektorba visz. (A) (B) (C) (D)

g) Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix, $Q$ az $A$-hoz tartozó kvadratikus alak. Ekkor: (A) $Q$ akkor és csak akkor pozitív definit, ha $\det A > 0$; (B) $Q$ akkor és csak akkor negatív definit, ha $\det A < 0$; (C) $Q$ akkor és csak akkor (pozitív vagy negatív) szemidefinit, ha $\det A = 0$; (D) ha $A$-nak a 0 sajátértéke, akkor $Q$ nem lehet (pozitív vagy negatív) definit. (A) (B) (C) (D)

h) Ha $A$ és $B$ ugyanannak az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformációnak a mátrixa, akkor: (A) tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$; (B) $\det A = \det B$; (C) $A$-nak és $B$-nek ugyanazok a jobb oldali sajátvektorai; (D) a fentiek közül egyik sem feltétlenül igaz. (A) (B) (C) (D)

FORDÍTS!

**3.** Az alábbi feladat minden részében írjuk be a megfelelő választ a sor végén levő keretbe. Csak az eredmény lesz pontozva. (16 *pont*)

a) Számítsuk ki az

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$
$$\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

vektorok „**abc**" vegyes szorzatát.

„**abc**" =

b) Tegyük föl, hogy

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & -6 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg a $d$ elem értékét.

$d =$

c) Írjunk az $A = \begin{bmatrix} 1 & * & 3 \\ 2 & 4 & * \\ * & 8 & * \end{bmatrix}$ mátrixban a $*$-ok helyére számokat úgy, hogy a mátrix rangja 1 legyen. Mi lesz a mátrix harmadik sorának harmadik eleme?

$a_{33} =$

d) Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrixot, és vegyük azt a $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezést, melyre $\varphi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Hány dimenziós $\varphi$ magtere?

$\dim \operatorname{Ker} \varphi =$

e) A $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformációnak $\lambda = 1$-hez tartozó egyik sajátvektora a $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, és $\mu = (-1)$-hez tartozó egyik sajátvektora a $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ vektor. Határozzuk meg $\varphi\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ értékét.

$\varphi\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right) =$

f) Legyen $a \neq 0$ tetszőleges valós szám. Mely egész értékeket veheti föl a $\lambda \in \mathbb{Z}$ paraméter, ha tudjuk, hogy az $\begin{bmatrix} a & \lambda a \\ \lambda a & 5a \end{bmatrix}$ mátrix által meghatározott kvadratikus alak (pozitív vagy negatív) definit?

$\lambda$ értéke lehet:

g) Legyen a $\varphi \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ lineáris transzformáció mátrixa a $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ bázisban $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Mi lesz a mátrix a $\{\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1\}$ bázisban?

$[\varphi]^{\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1} =$

h) Legyen $\mathbf{a} = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]^T$ és $\mathbf{b} = [-1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]^T$. Határozzuk meg a $\lambda \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy a $\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a}$ vektor merőleges legyen $\mathbf{a}$-ra (a szokásos $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$ skaláris szorzatra nézve $\mathbb{R}^4$-ben).

$\lambda =$

---

*Az I. részből alapértelmezésben legalább 18 pontot kell szerezni az átmenő osztályzathoz. Az elégséges megszerzésének további feltétele, hogy az I. és II. részből megszerzett pontszám elérje a 21-et. Akinek az első részből csak 15, 16 vagy 17 pontja van, annál az elégséges további feltétele, hogy összesen legalább 24, 23, illetve 22 pontot érjen el. 15 pont alatti első rész esetén a vizsga mindenképpen elégtelen.*

NÉV: ____________________ ELTE AZON.: ____________________

*Prog. inf. I. (BSc.)* **3. vizsgadolgozat (lin. alg.)/3** *2010. január 22.*

**II. rész (45 perc):** *A II. rész összpontszáma* 16. *Ügyeljünk a precíz fogalmazásra!*

**4.** a) Definiáljuk egy $n \times n$-es mátrix (jobb oldali) sajátértékét, sajátvektorát, ill. karakterisztikus polinomját. (3 *pont*)

b) Mondjuk ki és bizonyítsuk be a mátrix (jobb oldali) sajátértékei és karakterisztikus polinomja közötti összefüggést. (5 *pont*)

c) Definájuk a valós elemű mátrixok közötti $\mathbb{R}$ fölötti hasonlóságának fogalmát, és mutassunk példát egy olyan mátrixra, mely hasonló a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixhoz, de nem egyenlő vele. (A hasonlóságot indokolni is kell.) (2 *pont*)

d) Igazoljuk, hogy hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik. (3 *pont*)

*A hátlapra!*

e) Mutassunk példát olyan $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixra, amely nem diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött. (Ez utóbbi tulajdonságot igazolni is kell.) (3 *pont*)

*A hátlapra!*

---

*Ha az I. részből megszerzett pontszám eléri a 18-at, akkor a dolgozat érdemjegye az összpontszám alapján:*

| | |
|---|---|
| $0-20:$ | 1 |
| $21-25:$ | 2 |
| $26-30:$ | 3 |
| $31-35:$ | 4 |
| $36-48:$ | 5 |

EREDMÉNYHIRDETÉS: január 22-én, pénteken, 17.30 és 18.30 között a Déli tömb 3-708 szobájában. Ezt követően a vizsgadolgozatok Szalay Tanár Úrtól vehetők át a szóbeli vizsganapokon.