1	2	3	Σ_1	4	Σ	**J:**

NÉV: ______________________ ELTE AZON.: __________

Prog. inf. I. (BSc.) **4. vizsgadolgozat** *2009. július 1.*

I. rész (75 perc): *Az I. rész összpontszáma 32. A válaszokat itt (az I. részben) nem kell indokolni.*

1. Állapítsuk meg, igazak-e az alábbi állítások, és tegyünk X-et a megfelelő kockába. (A választ nem kell indokolni.) (8 *pont*)

	Igen	Nem
a) Két térvektor skaláris szorzata pontosan akkor nulla, ha a vektorok párhuzamosak.	☐	☒
b) Vektorok vektoriális szorzása se nem kommutatív, se nem asszociatív.	☒	☐
c) Ha egy V vektortérben $\lambda\mathbf{v} = \mu\mathbf{w}$ valamely $\lambda, \mu \in T$ skalárokra és $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ vektorokra, akkor vagy $\lambda = \mu$, vagy $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.	☐	☒
d) Ha az X mátrix az A mátrix egy $A^{(g)}$ általánosított inverze, és az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldható, akkor annak az $\mathbf{x} = X\mathbf{b}$ vektor megoldása.	☒	☐
e) Egy Vandermonde determináns értéke pontosan akkor 0, ha van két megegyező sora.	☒	☐
f) Egy $\mathbb{R}$ fölött véges dimenziós vektortér egy lineáris transzformációjának sajátértékei pontosan a minimálpolinomjának valós gyökei.	☒	☐
g) Ha egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix diagonalizálható, akkor n darab különböző sajátértéke van.	☐	☒
h) Egy euklideszi tér tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ vektoraira $(2\mathbf{x}, 2\mathbf{y}) = 2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.	☐	☒

2. Az alábbi feladat minden részében karikázzuk be a sor végén az egyetlen helyes válasz betűjelét. (8 *pont*)

a) Ha az $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ térvektorok vegyes szorzata pozitív, akkor: (A) bármely két vektor hegyesszöget zár be egymással; (B) a vektorok egysíkúak; (C) a vektorok a megadott sorrendben jobbrendszert alkotnak; (D) a vektorok lineárisan összefüggők. — (A) (B) $\boxed{\text{(C)}}$ (D)

b) Melyik állítás szerepel a vektortér-axiómák között? (A) minden $\mathbf{v} \in V$ esetén van $\mathbf{n} \in V$, hogy $\mathbf{n} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$; (B) van olyan $\mathbf{n} \in V$, hogy minden $\mathbf{v} \in V$ esetén $\mathbf{n} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$; (C) minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén van $\mathbf{v} \in V$ úgy, hogy $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{v}$; (D) minden $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{v} \in V$ esetén $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{v}\lambda$. — (A) $\boxed{\text{(B)}}$ (C) (D)

c) Egy $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mátrix bármely $A^{(g)}$ általánosított inverze (A) $k\times n$-es; (B) $k \times k$-as; (C) $n \times n$-es; (D) $n \times k$-as. — (A) (B) (C) $\boxed{\text{(D)}}$

d) Melyik állítás NEM teljesül tetszőleges $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixokra? (A) $A+B = B+A$; (B) $AB = BA$; (C) $\det(A+B) = \det(B+A)$; (D) $\det(AB) = \det(BA)$. — (A) $\boxed{\text{(B)}}$ (C) (D)

e) Az $1, 2, \ldots, n$ számok permutációiban az inverziók maximális száma: (A) $n-1$; (B) n; (C) $n(n-1)/2$; (D) $n!$. — (A) (B) $\boxed{\text{(C)}}$ (D)

f) Egy véges dimenziós vektortér egy lineáris transzformációjára a "szürjektív", "injektív" és "invertálható" tulajdonságok közül melyek ekvivalensek? (A) Semelyik kettő; (B) csak az első kettő; (C) csak a második és a harmadik; (D) bármelyik kettő. — (A) (B) (C) $\boxed{\text{(D)}}$

g) Melyik állítás NEM igaz bármely $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix $k_A(x)$ karakterisztikus, illetve $m_A(x)$ minimálpolinomjára? (A) $k_A(x)$ osztója $m_A(x)$-nek; (B) $m_A(x)$ osztója $k_A(x)$-nek; (C) $k_A(x)$ minden valós gyöke gyöke $m_A(x)$-nek is; (D) $m_A(x)$ minden valós gyöke gyöke $k_A(x)$-nek is. — $\boxed{\text{(A)}}$ (B) (C) (D)

h) Egy 4-dimenziós euklideszi térben megadható egymásra páronként merőleges nem nulla vektorok maximális száma (A) 3; (B) 4; (C) 5; (D) akármilyen nagy lehet. — (A) $\boxed{\text{(B)}}$ (C) (D)

FORDÍTS!

3. Az alábbi feladat minden részében írjuk be a megfelelő választ a sor végén lévő keretbe. Csak az eredményt pontozzuk. (16 *pont*)

a) Fejezzük ki az AB szakasz egy C pontjába mutató $\mathbf{c}$ helyvektort a végpontokba mutató $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ helyvektorok lineáris kombinációjaként, ha tudjuk, hogy a C pont $1:2$ arányban osztja a szakaszt (és A-hoz van közelebb).

$\boxed{\mathbf{c} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}}$

b) Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásszámát:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x - 2y + 4z &= 3 \\ x + 3y + 9z &= 13 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Megoldásszám: } 1}$

c) Számítsuk ki az alábbi mátrix második sorának harmadik eleméhez tartozó előjelezett aldetermináns értékét:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{A_{23} = 6}$

d) Határozzuk meg az alábbi W vektortér dimenzióját:

$$W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = 0 \right\}$$

$\boxed{\dim W = 3}$

e) Határozzuk meg az $1, 2, \ldots, 8$ számok $1, 5, 2, 6, 3, 7, 4, 8$ permutációjában az inverziók számát.

$\boxed{I = 6}$

f) Egészítsük ki az alábbi mondatot, hogy igaz állítást kapjunk, majd a kiegészítést írjuk be a válasznak szánt keretbe:
Egy nem nulla mátrix rangja a legnagyobb olyan k szám, amelyre van a mátrixnak olyan $k \times k$-as részmátrixa, melynek ...

$\boxed{\ldots \text{ determinánsa nem nulla.}}$

g) Az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixnak a $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektor sajátvektora. Határozzuk meg az A-nak $\mathbf{v}$-hez tartozó λ sajátértékét.

$\boxed{\lambda = 3}$

h) Vegyük az $\mathbb{R}^3$ valós euklideszi teret a szokásos $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ skaláris szorzattal. Egészítsük ki $\mathbb{R}^3$ egy ortogonális bázisává a

$$\left\{ \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

vektorrendszert.

$\boxed{\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}$

Az I. részből alapértelmezésben legalább 18 pontot kell szerezni az átmenő osztályzathoz. Az elégséges megszerzésének további feltétele, hogy az I. és II. részből megszerzett pontszám elérje a 21-et. Akinek az első részből csak 15, 16 vagy 17 pontot sikerült megszereznie, annál az elégséges további feltétele, hogy összesen legalább 24, 23, illetve 22 pontot érjen el. 15 pont alatti első rész esetén a vizsga mindenképpen elégtelen.

NÉV: ______________________ ELTE AZON.: ______________

Prog. inf. I. (BSc.) **4. vizsgadolgozat/3** *2009. július 1.*

II. rész (45 perc): *A II. rész összpontszáma* 16. *Ügyeljünk a precíz fogalmazásra!*

4. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, az A mátrix i-edik sorának j-edik elemét jelölje a_{ij}.

a) Írjuk fel az A^2 mátrix i-edik sorának j-edik elemét. (2 *pont*)

b) Értelmezzük az A mátrix i-edik sorának j-edik eleméhez tartozó A_{ij} előjelezett aldeterminánst. (3 *pont*)

c) Mondjuk ki a kifejtési tételt, és szemléltessük annak alkalmazását az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ mátrix determinánsának a második oszlop szerinti kifejtésével. (4 *pont*)

d) Írjuk fel az A^{-1} mátrix i-edik sorának j-edik elemét. (2 *pont*)

e) Mondjuk ki és bizonyítsuk be a ferde kifejtés tételét. (5 *pont*)

A hátlapra!

Ha az I. részből megszerzett pontszám eléri a 18-at, akkor a dolgozat érdemjegye az összpontszám alapján:

$0 - 20:$	1
$21 - 26:$	2
$27 - 32:$	3
$33 - 38:$	4
$39 - 48:$	5

EREDMÉNYHIRDETÉS: Ma délután 15:00 és 16:30 között a Déli tömb 3–711/a szobájában. Ezt követően a vizsgadolgozatok Szalay Tanár Úrtól vehetők át a szóbeli vizsganapokon.