1	2	3	Σ_1	4	Σ	**J:**

NÉV: ______________________ ELTE AZON.: __________

Prog. inf. I. (BSc.) **3. vizsgadolgozat (lin. alg.)** *2010. január 22.*

I. rész (75 perc): *Az I. rész összpontszáma 32. A válaszokat itt (az I. részben) nem kell indokolni!*

1. Állapítsuk meg, igazak-e az alábbi állítások, és tegyünk X-et a megfelelő kockába. (A választ nem kell indokolni!) (8 *pont*)

Igen Nem

1 a) Ha az $U \subseteq \mathbb{R}^3$ halmaz zárt a vektorok összeadására, akkor U altér $\mathbb{R}^3$-ben. ☐ ☒

Előfordulhat, hogy U nem zárt a skalárszorosra, így nem lesz altér. Pl. $\mathbb{R}^n$-ben mint valós vektortérben azok a vektorok, melyeknek minden komponense egész szám, ilyen halmaz. Hasonlóképpen nem lesz altér $\mathbb{R}^n$-ben azoknak a vektoroknak a halmaza, melyben minden komponens pozitív.

b) $\mathbb{R}^5$-nek egy tetszőleges nem nulla alterében van ötelemű generátorrendszer. ☒ ☐

$\mathbb{R}^5$ bármely nem nulla alterének dimenziója $1 \le k \le 5$, így van benne k elemű bázis. Ehhez akárhány vektort hozzávehetünk U-ból, a kiegészített halmaz továbbra is generátorrendszer lesz. És U nem nulla volta miatt van is benne végtelen sok elem, így találhatunk még $5-k$ elemet a kiegészítésre.

c) $\mathbb{R}^5$ bármely két alterének a metszete is és az uniója is altér. ☐ ☒

Alterek metszete ugyan altér, de uniójuk már általában nem az: pl. a síkban vehetjük két origót tartalmazó, egymástól különböző egyenes unióját; ez a halmaz nem lesz zárt a vektorok összeadására.

d) Ha az $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixokra $AB = BA$, akkor $A^TB^T = B^TA^T$. ☒ ☐

Ha $AB = BA$, akkor vehetjük mindkét oldal transzponáltját, továbbra is egyenlőséget kapunk. De a szorzat transzponálásának szabálya miatt: $(AB)^T = B^TA^T$, és $(BA)^T = A^TB^T$. Tehát épp a keresett egyenlőséget kapjuk.

e) Ha egy $n \times n$-es mátrix minden eleme pozitív egész szám, akkor a mátrix determinánsa is pozitív egész. ☐ ☒

A csupa 1-est tartalmazó mátrix determinánsa 0, ha $n \ge 2$, tehát az állítás nem igaz. Hasonlóképpen $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$. – Az állítás már csak azért sem lehet igaz, mert pl. egy sorcsere megváltoztatja a determináns előjelét, de az elemek ugyanazok maradnak.

f) Ha egy $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció magtere csak a nulla vektort tartalmazza, akkor φ injektív. ☒ ☐

Ez egy előadáson elhangzott állítás: ha φ nem lenne injektív, akkor lenne két különböző vektor, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$, melyekre $\varphi(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{w})$. A leképezés linearitása miatt ekkor $\varphi(\mathbf{v}-\mathbf{w}) = \mathbf{0}$, azaz a $\mathbf{v}-\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ vektor benne van φ magterében.

g) Egy 2×2-es valós mátrix pontosan akkor diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött, ha van két különböző sajátértéke. ☐ ☒

Az egységmátrix jó ellenpélda erre az állításra, hiszen diagonális alakú, de az egyetlen sajátértéke az 1. Az állításnak az egyik iránya azonban igaz: tétel volt, hogy ha egy $n \times n$-es mátrixnak van n darab különböző sajátértéke, akkor a mátrix diagonalizálható, mert véve egy-egy sajátvektort a különböző sajátértékekhez, azok lineárisan függetlenek lesznek, így a térnek létezik a mátrix sajátvektoraiból álló bázisa, azaz a mátrix diagonalizálható.

h) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ és $\mathbb{R}^4$ izomorfak mint $\mathbb{R}$ fölötti vektorterek. ☒ ☐

Mindkét vektortér dimenziója 4 a valós számtest fölött, és ez szükséges és elegendő feltétele az izomorfiának.

2. Az alábbi feladat minden részében karikázzuk be a sor végén az egyetlen helyes válasz betűjelét. (8 *pont*)

a) Ha egy $U \leq \mathbb{R}^n$ altérnek van 5 elemű generátorrendszere, akkor: (A) $5 \geq n$; (B) $5 \leq n$; (C) $5 = n$; (D) a fentiek közül egyik sem következik. (A) (B) (C) $\boxed{\text{(D)}}$

A feltétel csak annyit jelent, hogy az altér dimenziója legföljebb 5. *De pl.* 1 *dimenziós altere van* $\mathbb{R}^3$*-nek is,* $\mathbb{R}^7$*-nek is, tehát az* (A), (B), (C) *következtetések egyike sem igaz.*

b) A geometriai vektorok vektoriális szorzatára igaz, hogy bármely $\mathbf{a}, \mathbf{b}$-re: (A) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$; (B) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ lineárisan függetlenek; (C) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ akkor és csak akkor a nullvektor, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek egymásra; (D) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ akkor és csak akkor a nullvektor, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamosak egymással. (A) (B) (C) $\boxed{\text{(D)}}$

A vektoriális szorzásnál tanultak szerint $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$*, tehát nem nulla szorzat esetén az* (A) *állítása nem igaz. A* (B) *állítás ugyan igaz, ha* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *lineárisan függetlenek (hiszen ilyenkor a vektoriális szorzatuk merőleges rájuk), de ha* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *párhuzamosak, akkor a vektoriális szorzat* $\mathbf{0}$*, és így a mondott rendszer nem lehet lineárisan független. A* (C) *állítás sem igaz, hiszen egymásra merőleges nem nulla vektorok vektoriális szorzatának hossza épp a hosszak szorzata, tehát nem nulla (ugyanis* $\sin 90° = 1$*). Végezetül a* (D) *állítás pedig igaz, hiszen a hosszak szorzatát* $\sin 0°$*-kal vagy* $\sin 180°$*-kal kell szorozni, hogy a vektoriális szorzat hosszát megkapjuk, és ez mindig* 0*-t eredményez.*

c) $M \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ tetszőleges négyzetes mátrix esetén: (A) $\rho(2M) = \rho(M)$; (B) $\rho(M^2) = \rho(M)$; (C) $\rho(M)$ akkor és csak akkor nem nulla, ha M invertálható; (D) $\rho(M)$ akkor és csak akkor nem nulla, ha $\det M$ nem nulla. $\boxed{\text{(A)}}$ (B) (C) (D)

Egy vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha a kétszeresekből álló vektorrendszer lineárisan független — ez könnyen látszik pl. a függetlenség definíciójából. Tehát az (A) *feltétel igaz. Másrészt pl.* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$*, így az egyik mátrix rangja* 1*, a másiké pedig* 0*. Tehát* (B) *nem igaz. Az előbb megadott mátrix ellenpélda* (C)*-re és* (D)*-re is: a rang nem nulla, de* M *nem invertálható, és a determinánsa* 0*. (Megjegyzendő, hogy a* (C) *és* (D) *feltételek következtetéseinek egyik iránya igaz: invertálható (azaz nem nulla determinánsú) mátrix rangja nem nulla (sőt, megegyezik a mátrix méretével,* n*-nel).*

d) Egy $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mátrix determinánsa nem változik, ha: (A) egyik sorát beszorozzuk (-1)-gyel; (B) az egész mátrixot beszorozzuk (-1)-gyel; (C) megcseréljük az első két sorát; (D) az utolsó sort az első sorba visszük, a többi sort pedig egy sorral lejjebb csúsztatjuk. (A) $\boxed{\text{(B)}}$ (C) (D)

Ha M*-nek egy sorát beszorozzuk* (-1)*-gyel, akkor a determináns is az eredeti érték* (-1)*-szeresére változik. Ez nem nulla determináns esetén valódi változást jelent, tehát az* (A) *állítás hamis. Az egész mátrix szorzása négy sor szorzását jelenti, tehát a determináns a* $(-1)^4$*-szeresére változik, azaz változatlan marad. A* (B) *állítás tehát igaz. A sorcsere egy* (-1)*-szeres szorzót jelent a determináns értékére, tehát* (C) *általában hamis. Végezetül a* (D) *feltételben megadott művelet valójában* 3*-szoros sorcserét jelent, így a determinánst a* (-1)*-szeresébe viszi, azaz az utolsó feltétel is hamis.*

e) Legyen $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tetszőleges mátrix. Ekkor: (A) M sajátvektorai alteret alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben; (B) M sajátvektorai és a nullvektor alteret alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben; (C) M sajátértékei alteret alkotnak $\mathbb{R}$-ben; (D) a fentiek közül egyik sem feltétlenül igaz. (A) (B) (C) $\boxed{\text{(D)}}$

Világos, hogy nullvektor nélkül nem kaphatunk alteret, viszont a nullvektor nem sajátvektor. Az (A) *tehát nem lehet igaz. De általában még a nullvektorral kiegészítve sem kapunk alteret: pl. az* $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *mátrixnak pontosan azok a sajátvektorai, melyeknek az egyik komponense* 0*, a másik pedig nem nulla. Világos, hogy ez a halmaz a síkon a két koordinátatengelynek felel meg, és ily módon nem kapunk alteret. Tehát a* (B) *állítás sem igaz. (Érdemes azonban megjegyeznünk, hogy egyetlen sajátértékhez tartozó sajátvektorok a nullvektorral kiegészítva mindig alteret alkotnak.) A*

(C) *állítás hamis, hiszen pl. az egységmátrixnak egyetlen sajátértéke az* 1*; ez nem altér* $\mathbb{R}$*-ben. Marad tehát a* (D) *állítás, mely az előbb elmondottak szerint szükségszerűen igaz.*

f) Legyen φ az $\mathbb{R}^3$ tér tükrözése egy origón átmenő síkra. Ekkor: (A) φ nem injektív; (B) φ-nek sajátértéke a nulla; (C) létezik a térnek φ sajátvektoraiból álló bázisa; (D) φ^2 minden vektort a nullvektorba visz.

(A) (B) $\boxed{\text{(C)}}$ (D)

φ injektív, mert különböző vektoroknak különböző vektorokat feleltet meg, tehát (A) *hamis. Ebből az is következik, hogy φ-nek nem sajátértéke a nulla, mert a* 0*-hoz tartozó sajátvektorok pontosan a magtér nem nulla vektorai; ilyenek pedig jelenleg nincsenek. Tehát a* (B) *is hamis. A tükrözési síknak egy bázisát kiegészítve egy, a síkra merőleges vektorral, mindhárom vektor sajátvektor lesz, és a térnek egy bázisát alkotják, tehát* (C) *igaz. Végezetül φ^2 minden vektort helybenhagy, tehát* (D) *hamis.*

g) Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix, Q az A-hoz tartozó kvadratikus alak. Ekkor: (A) Q akkor és csak akkor pozitív definit, ha $\det A > 0$; (B) Q akkor és csak akkor negatív definit, ha $\det A < 0$; (C) Q akkor és csak akkor (pozitív vagy negatív) szemidefinit, ha $\det A = 0$; (D) ha A-nak a 0 sajátértéke, akkor Q nem lehet (pozitív vagy negatív) definit.

(A) (B) (C) $\boxed{\text{(D)}}$

$\det A$ *pozitivitása valóban kell a pozitív definitséghez, de nem elég: pl. az első sor első elemének is poziívnak kell lennie, és ez nem mindig teljesül. Így* (A) *hamis. A* $\det A$ *negativitása pedig nem is szükséges feltétele (és nem is elégséges) a Q negatív definitségének: pl.* 2×2*-es mátrixnál egyenesen* $\det A > 0$ *kell a negatív definitséghez. Tehát* (B) *sem igaz. Az a* 3×3*-as diagonális mátrix, melynek főátlójában egy-egy* $1, -1$ *és* 0 *áll, indefinit, de a mátrix determinánsa* 0*. Tehát* (C) *sem igaz. Végezetül a* (D) *állítás igaz, mert ha a* 0 *sajátérték, akkor* $\det A = 0$*, a determináns nem nulla volta viszont szükséges feltétele bármilyen definitségnek.*

h) Ha A és B ugyanannak az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformációnak a mátrixa, akkor: (A) tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$; (B) $\det A = \det B$; (C) A-nak és B-nek ugyanazok a jobb oldali sajátvektorai; (D) a fentiek közül egyik sem feltétlenül igaz.

(A) $\boxed{\text{(B)}}$ (C) (D)

Az (A) *állítás „csábító” ugyan, de nem igaz. Az* $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ *és a* $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ *mátrixok ugyanannak a transzformációnak a mátrixai (azaz hasonlók), csak éppen megcseréltük a két bázisvektor sorrendjét. De az első mátrixot* $\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$*-gyel szorozva* $\mathbf{0}$*-t kapunk, míg a második mátrix esetében nem. (Azért nem igaz az állítás, mert bár mindkét mátrix ugyanazt a transzformációt írja le, a vektortérben levő absztrakt vektoroknak nem ugyanaz a koordinátavektor felel meg* $\mathbb{R}^n$*-ben, ha különböző bázisban írjuk föl őket.) A* (B) *állítás igazsága ismert tétel: ilyenkor ugyanis* $B = S^{-1}AS$ *valamilyen S mátrixra, és a determinánsok szorzástételéből kijön, hogy* $\det B = \det A$*. A* (C) *állítás ismét hamis, ugyanolyan okok miatt, mint amit az* (A)*-nál írtunk; pl.* $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ *és* $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ *egyaránt a sík egy tükrözésének felelnek meg, és míg az első mátrixnak sajátvektora az* $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ *vektor, a másodiknál ez nem így van. Végezetül, mivel a* (B) *állítás igaz, ezért a* (D) *szükségszerűen hamis.*

3. Az alábbi feladat minden részében írjuk be a megfelelő választ a sor végén levő keretbe. Csak az eredmény lesz pontozva. (16 *pont*)

a) Számítsuk ki az

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$
$$\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$
$$\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

vektorok „**abc**” vegyes szorzatát.

$\boxed{\text{„}\mathbf{abc}\text{”} = -1}$

A vegyes szorzatot számolhatjuk úgy, hogy az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ *bázis szerinti koordinátákat egy* 3×3*-as mátrix soraiba írjuk be, majd kiszámoljuk a mátrix determinánsát. Így* „**abc**” $= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -1.$

b) Tegyük föl, hogy

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & -6 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{d = -2}$

Határozzuk meg a d elem értékét.

A szorzatmátrix második sorának második eleme $-6 = 0 \cdot b + 3 \cdot d + 5 \cdot 0 = 3 \cdot d$*. Ebből adódik, hogy* $d = -2$*.*

c) Írjunk az $A = \begin{bmatrix} 1 & * & 3 \\ 2 & 4 & * \\ * & 8 & * \end{bmatrix}$ mátrixban a $*$-ok helyére számokat úgy, hogy a mátrix rangja 1 legyen. Mi lesz a mátrix harmadik sorának harmadik eleme?

$\boxed{a_{33} = 12}$

Ha a mátrix rangja 1, akkor valamennyi sora, illetve valamennyi oszlopa „arányos” egymással. A második sor első két eleméből látszik, hogy a második oszlop kétszerese az elsőnek, így a harmadik sor első eleme 4 (és az első sor másodk eleme pedig 2). De ebből az is kiderül, hogy a harmadik sor az elsőnek négyszerese, tehát a harmadik sor harmadik eleme $4 \cdot 3 = 12$*.*

d) Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrixot, és vegyük azt a $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezést, melyre $\varphi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Hány dimenziós φ magtere?

$\boxed{\dim \operatorname{Ker} \varphi = 2}$

A magtér dimenziója megegyezik a mátrixhoz tartozó homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterének dimenziójával, ez utóbbi pedig úgy kapható meg, hogy az oszlopok számából levonjuk a mátrix rangját. A megadott mátrix rangja 2, így a keresett dimenzió is 2.

e) A $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformációnak $\lambda = 1$-hez tartozó egyik sajátvektora a $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, és $\mu = (-1)$-hez tartozó egyik sajátvektora a $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ vektor. Határozzuk meg $\varphi\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ értékét.

$\boxed{\varphi\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}}$

Könnyen látható, hogy $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$*, így* φ*-nél vett képe könnyen számolható:* $\varphi\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2\mathbf{v} - 2\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$.

f) Legyen $a \neq 0$ tetszőleges valós szám. Mely egész értékeket veheti föl a $\lambda \in \mathbb{Z}$ paraméter, ha tudjuk, hogy az $\begin{bmatrix} a & \lambda a \\ \lambda a & 5a \end{bmatrix}$ mátrix által meghatározott kvadratikus alak (pozitív vagy negatív) definit?

$\boxed{\lambda \text{ értéke lehet: } -2, -1, 0, 1, 2}$

A definitségnek jelen esetben szükséges és elégséges feltétele, hogy a mátrix determinánsa, $5a^2 - \lambda^2 a^2$ pozitív legyen. Ez pontosan azon λ-kra fog teljesülni, melyekre $\lambda^2 < 5$, azaz $\lambda \in \mathbb{Z}$ miatt csakis $\lambda \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ lehet.

g) Legyen a $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ lineáris transzformáció mátrixa a $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ bázisban $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Mi lesz a mátrix a $\{\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1\}$ bázisban?

$\boxed{[\varphi]^{\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}$

A mátrix azt jelenti, hogy $\varphi(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1$ és $\varphi(\mathbf{b}_2) = 2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2$. Ha most megcseréljük a báziselemek sorrendjét, akkor épp a $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$-ot kapjuk.

h) Legyen $\mathbf{a} = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]^T$ és $\mathbf{b} = [-1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]^T$. Határozzuk meg a $\lambda \in \mathbb{R}$ paraméter értékét úgy, hogy a $\mathbf{b} + \lambda \mathbf{a}$ vektor merőleges legyen $\mathbf{a}$-ra (a szokásos $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$ skaláris szorzatra nézve $\mathbb{R}^4$-ben).

$\boxed{\lambda = -1/2}$

Formálisan fölírva az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}+\lambda\mathbf{a}$ vektorok skaláris szorzatát, azt kapjuk, hogy $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}+\lambda\mathbf{a} \rangle = 2+4\lambda$. Ez azt jelenti, hogy $\lambda = -1/2$ kell a merőlegességhez.

Az I. részből alapértelmezésben legalább 18 pontot kell szerezni az átmenő osztályzathoz. Az elégséges megszerzésének további feltétele, hogy az I. és II. részből megszerzett pontszám elérje a 21-et. Akinek az első részből csak 15, 16 vagy 17 pontja van, annál az elégséges további feltétele, hogy összesen legalább 24, 23, illetve 22 pontot érjen el. 15 pont alatti első rész esetén a vizsga mindenképpen elégtelen.

II. rész (45 perc): *A II. rész összpontszáma 16. Ügyeljünk a precíz fogalmazásra!*

4. a) Definiáljuk egy $n \times n$-es mátrix (jobb oldali) sajátértékét, sajátvektorát, ill. karakterisztikus polinomját. (3 *pont*)

b) Mondjuk ki és bizonyítsuk be a mátrix (jobb oldali) sajátértékei és karakterisztikus polinomja közötti összefüggést. (5 *pont*)

c) Definiáljuk a valós elemű mátrixok közötti $\mathbb{R}$ fölötti hasonlóságának fogalmát, és mutassunk példát egy olyan mátrixra, mely hasonló a $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixhoz, de nem egyenlő vele. (A hasonlóságot indokolni is kell.) (2 *pont*)

d) Igazoljuk, hogy hasonló mátrixok karakterisztikus polinomja megegyezik. (3 *pont*)

A hátlapra!

e) Mutassunk példát olyan $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixra, amely nem diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött. (Ez utóbbi tulajdonságot igazolni is kell.) (3 *pont*)

A hátlapra!

Ha az I. részből megszerzett pontszám eléri a 18-at, akkor a dolgozat érdemjegye az összpontszám alapján:

$0 - 20:$	1
$21 - 25:$	2
$26 - 30:$	3
$31 - 35:$	4
$36 - 48:$	5

EREDMÉNYHIRDETÉS: január 22-én, pénteken, 17.30 és 18.30 között a Déli tömb 3-708 szobájában. Ezt követően a vizsgadolgozatok Szalay Tanár Úrtól vehetők át a szóbeli vizsganapokon.