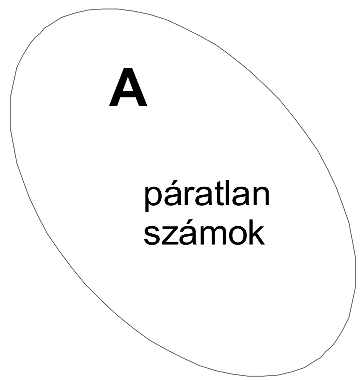
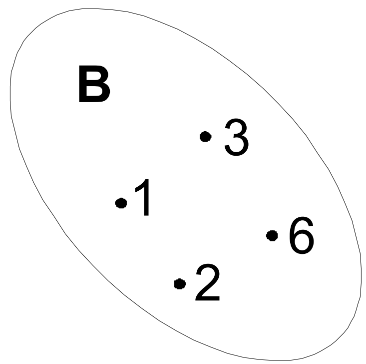
1.1 Halmazelméleti fogalmak, jelölések

Alapfogalmak (nem definiáljuk)	**Jelölések**
Halmaz	A,B,C,…
x eleme az A halmaznak	$x \in A$
x nem eleme A halmaznak	$x \notin A$



$3 \in A$ és $4 \notin A$

Halmaz megadása:	
Elemeinek felsorolásával:	{a,b,c,…}
Tulajdonság (predikátum) megadásával:	{x: P(x)} vagy {x | P(x)}.
Üres halmaz: halmaz, melynek nincs eleme.	$\emptyset$ vagy {}



B= {1,2,3,6}

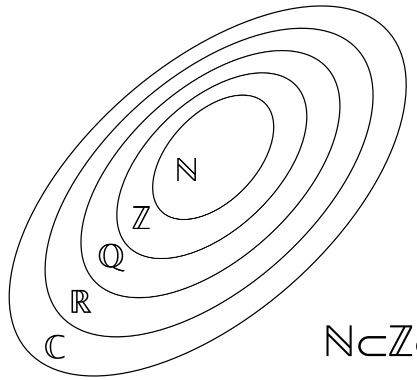
B= {x: x osztója 6-nak} vagy

B= {x | x osztója 6-nak}.

Példa: {x: ahol x az $x^2+1=0$ egyenlet valós megoldása}

1.2 Ismert számhalmazok jelölései

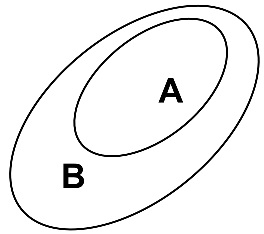
- Természetes számok (0-t beleértve) halmaza $\mathbb{N}$
- Pozitív természetes számok halmaza $\mathbb{N}^+$
- Egész számok halmaza, (pozitívak ill. negatívak) $\mathbb{Z}$, ($\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$)
- Racionális számok halmaza (pozitívak ill. negatívak) $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}$)$^-$
- Valós számok halmaza (pozitívak ill. negatívak) $\mathbb{R}$, ($\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$)
- Komplex számok halmaza $\mathbb{C}$



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

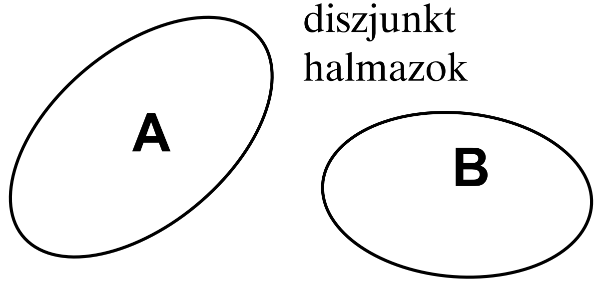
1.3 Halmazokon értelmezett relációk

A⊆B



$A \subseteq B$ A halmaz **részhalmaza** B-nek, ha az A halmaz minden eleme, eleme a B halmaznak. (Az $\emptyset$ legyen minden halmaznak részhalmaza!)

diszjunkt halmazok



$A \subset B$ A halmaz **valódi részhalmaza** B-nek, ha $A \subseteq B$ és van olyan $b \in B$, melyre $b \notin A$.

$A = B$ A és B halmaz egyenlő, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$.

A és B halmazok **diszjunktak (elemidegenek),** ha nincs közös elemük.

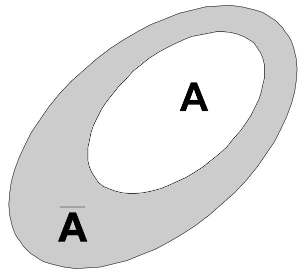
1.4 Műveletek halmazokon

Legyenek A, B halmazok egy rögzített **U** ún. univerzális halmaz tetszőleges részhalmazai!

$U=\{1,2,3,4,5,6\}$

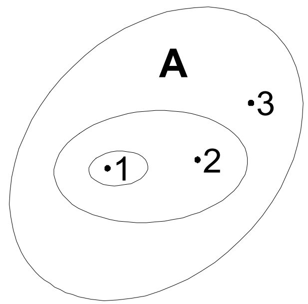
Komplementer halmaz: Az A halmaz (U-beli) komplementere U azon elemei, amelyek A-nak nem elemei.

$$\overline{A}=\{x\colon x\notin A \text{ és } x\in U\}$$



$A=\{1,2,3\}$

$\overline{A}=\{4,5,6\}$



$\{1\}\in P(A)$

$\{1,2\}\in P(A)$

Hatványhalmaz: A hatványhalmaza, **P**(A) az A halmaz részhalmazainak halmaza.

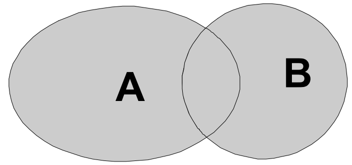
$$\mathbf{P}(A)=\{X\colon X\subseteq A\}$$

$$\mathbf{P}(A)=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

$A=\{1,2,3\}$
$B=\{2,3,5,6\}$

Egyesítés (unió): $A \cup B$ az A és B halmazok elemeiből álló halmaz.

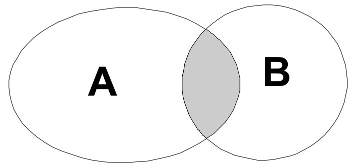
$A \cup B=\{x: x \in A \text{ vagy } x \in B\}$



$A \cup B=\{1,2,3,5,6\}$

Metszet (közös rész): $A \cap B$ elemei A azon elemei, amelyek B-nek is elemei.

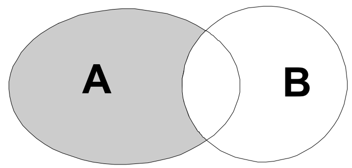
$A \cap B=\{x: x \in A \text{ és } x \in B\}$



$A \cap B=\{2,3\}$

Különbség: $A \setminus B$ elemei A azon elemei, amelyek B-nek nem elemei.

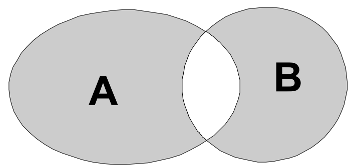
$A \setminus B=\{x: x \in A \text{ és } x \notin B\}$



$A \setminus B=\{1\}$

Szimmetrikus különbség : $A \Delta B$ elemei olyan A-beli elemek, melyek B-nek nem elemei valamint az olyan B-beli elemek, amelyek A-nak nem elemei.

$A \Delta B=(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

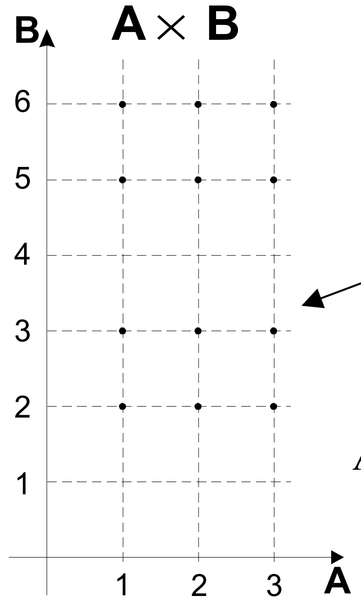


$A \Delta B=\{1,5,6\}$

Descartes-szorzat (direkt szorzat): AxB elemei A és B halmaz elemeiből (a megadott sorrendben) képzett rendezett párok halmaza.

$AxB=\{(a,b): a\in A \text{ és } b\in B\}$

$AxB=\{ (1,2), (1,3),\ldots,(1,6), (2,2), (2,3),\ldots,(2,6), (3,2), (3,3),\ldots,(3,6)\}$



$A = \{1,2,3\}$
$B = \{2,3,5,6\}$

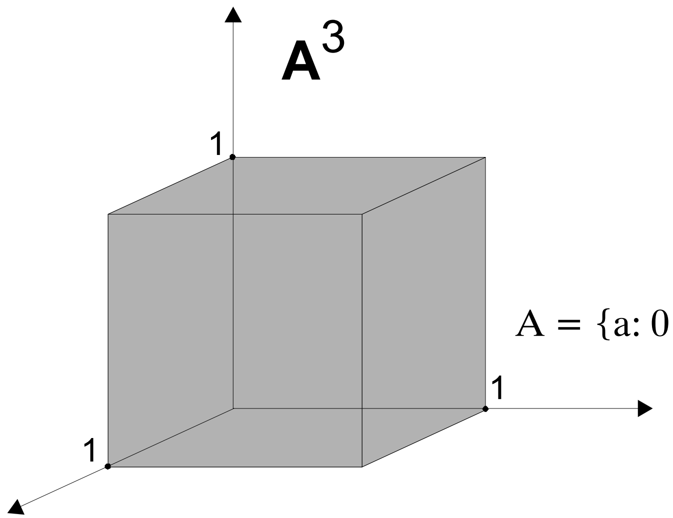
$(3,2) \in AxB$

$AxB = \{(1,2), (1,3),\ldots,(1,6), (2,2), (2,3),\ldots,(2,6), (3,2), (3,3),\ldots,(3,6)\}$

n-tényezős Descartes szorzat: $A_1, A_2, \ldots A_n$ halmaz direkt szorzatának elemei mindazok az $(a_1, a_2, \ldots ,a_n)$ rendezett elem n-esek, melyeknek elemei (a megadott sorrendben) az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazokból valók.

$A_1xA_2x\ldots xA_n=\{(a_1, a_2, \ldots ,a_n): a_1\in A_1,$

$a_2\in A_2,\ldots,a_n\in A_n\}$



$A = \{a: 0 \le a \le 1, a \in \mathbb{R}\}$

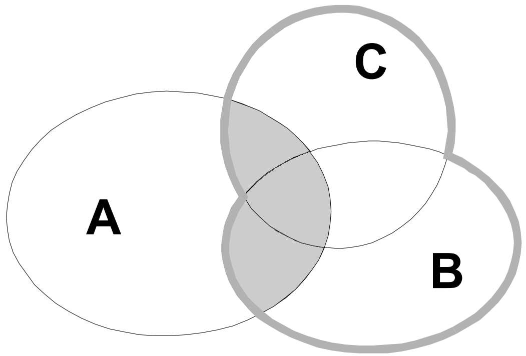
Halmaz n-dik hatványa: n -tényezős Descartes szorzat, melynek tényezői megegyeznek.
$A^n = AxAx\ldots xA$

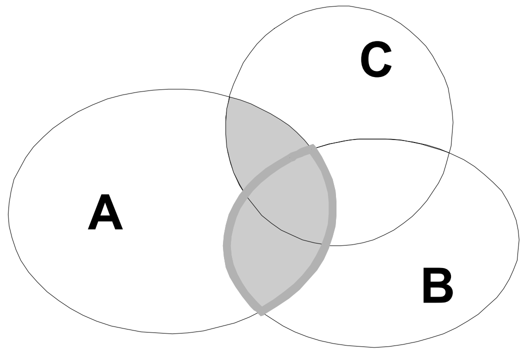
Műveleti tulajdonságok

Tétel: Tetszőleges $A,B,C \subseteq U$ halmazokra igazak az alábbi azonosságok:

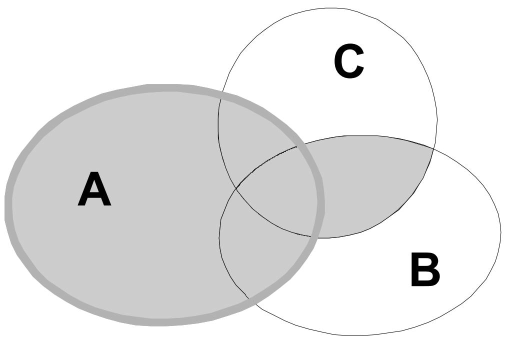
(a)	$\overline{\overline{A}} = A$	$\overline{\varnothing} = U$	
(b)	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Az $\cup$ és $\cap$ műveletek *kommutatív*ak.
(c)	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Az $\cup$ és $\cap$ műveletek *asszociatív*ak.
(d)	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Az $\cup$ és $\cap$ műveletek *idempotens*ek.
(e)	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap U = A$	Az $\cup$ műveletre az $\varnothing$ *nullelem*,
(f)	$A \cup U = U$	$A \cap \varnothing = \varnothing$	a $\cap$ műveletre az U *egységelem*.
(g)	$(A \cup B) \cap A = A$	$(A \cap B) \cup A = A$	*Elnyelés*i (abszorpció) tulajdonság
(h)	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	*Disztributivitás*
(i)	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	*De Morgan* azonosságok

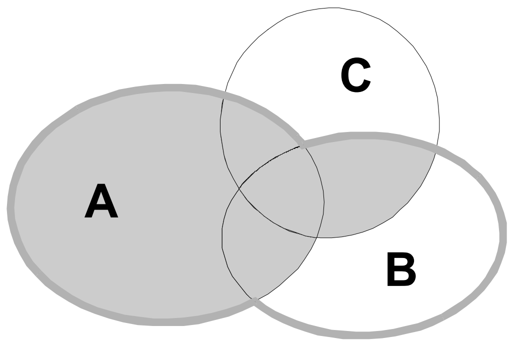
$\cap$ és $\cup$ disztributivitása





$$A\cap(\mathbf{B}\cup\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cap\mathbf{B}) \cup (A\cap C)$$





$$\mathbf{A}\cup(B\cap C) = (\mathbf{A}\cup\mathbf{B}) \cap (A\cup C)$$

2. Relációk

Az A_1, A_2, … A_n halmazokon értelmezett **R reláció**n az $R \subseteq A_1 x A_2 x \ldots x A_n$ halmaz valamely részhalmazát értjük.

Bináris a reláció, ha a direkt szorzat két tényezőből áll, *homogén,* ha a direkt szorzat tényezői megegyeznek.

2.1 Bináris relációk

A **bináris relációt** az **(A,B,R)** rendezett halmazhármas határozza meg, melyekre $\mathbf{R \subseteq AxB}$.

(*Megjegyzés:* ha A, B rögzített, akkor a relációra R-ként hivatkozunk.)

Értelmezési tartománya:

$D_R = \{a: a \in A$, melyhez létezik $b \in B$, hogy $(a,b) \in R\ \}$

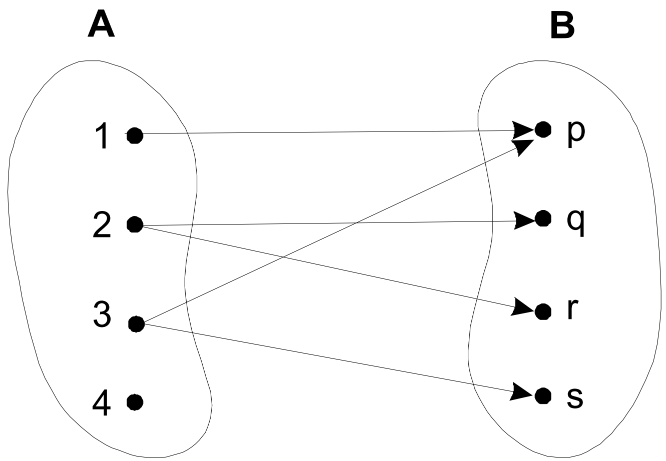
Értékkészlete:

$R_R = \{b: b \in B$, melyhez létezik $a \in A$, hogy $(a,b) \in R\ \}$

Jelölés: ha $(a,b) \in R$, akkor aRb.

Két reláció $R_1 \subseteq A_1xB_1$ és $R_2 \subseteq A_2xB_2$ *egyenlő*, ha $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$ és $R_1 = R_2$.

Példa: A= {1,2,3,4}, B={p,q,r,s},



$R_1 = \{(1,p), (2,q), (2,r), (3,p), (3,s)\}$

$D_{R1} = \{1,2,3\}$ $R_{R1} = \{p,q,r,s\}$

Példák bináris relációra

1. „Termék” reláció: (**A,B,T**):
   A={ tojás, tej, kukorica}, **B**= {kecske, marha, csirke}, **T**={(a,b): ha a terméke b-nek.}
   T={(tojás,csirke), (tej, marha), (tej, kukorica)}

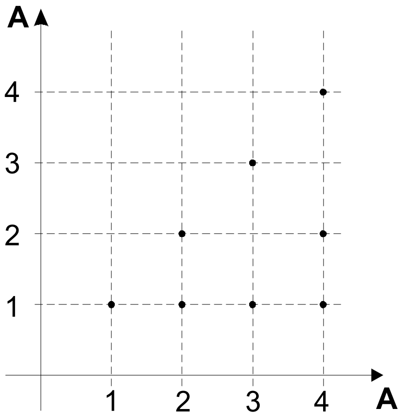
2. „Szomszédság” reláció: (**E,E,S**): E={e: e európai ország}, **S**={(s,r): ha s és r szomszédos országok}
   (Olaszország, Svájc)$\in$ **S**, (Magyarország, Svájc)$\notin$ **S**

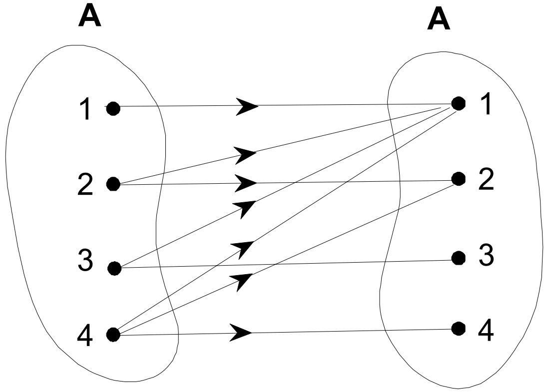
Néhány ismert matematikai reláció és jelei

Neve	Megadása (A,B,R)		Ismert jelek aRb
„Egyenlőség” reláció:	$(\mathbb{R},\mathbb{R},R_1)$	$R_1=\{(a,b): a=b\}$	$a=b$
„Kisebb” reláció:	$(\mathbb{R},\mathbb{R},R_2)$	$R_2=\{(a,b): a<b\}$	$a<b$
„Oszthatósági” reláció:	$(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, R_3)$	$R_3=\{(a,b)$: a osztható b-vel$\}$	$b\|_a$
„mod n” reláció	$(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, R_4)$	$R_4=\{(a,b): n\|_{a-b}\}$	$a\equiv b \pmod n$
„Eleme” reláció:	$(A, P(A), R_5)$, A tetszőleges halmaz.	$R_5=\{a,b$: ha az $a\in b\}$	$a\in b$
„Részhalmaz” reláció:	$(P(A), P(A), R_6)$, A tetszőleges halmaz.	$R_6=\{(a,b): a\subseteq b\}$	$a\subseteq b$
„Diszjunkt” reláció	$(P(A), P(A), R_7)$, A tetsz.	$R_7=\{(a,b): a\cap b=\emptyset\}$	

Bináris relációk lehetséges ábrázolási módjai

Példa: Oszthatósági reláció az A={1,2,3,4} halmazon.

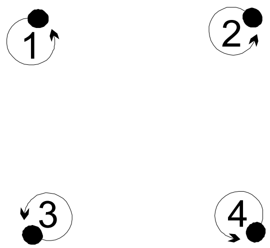




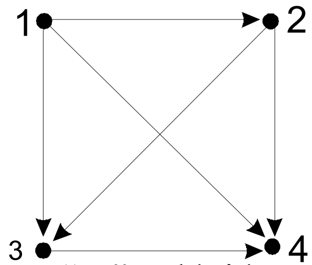
1	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	1	1	0	0
3	1	0	1	0
4	1	1	0	1

Homogén reláció (A,A,R) esetén szokásos ábrázolási mód: Irányított gráffal, ahol a gráf csúcsai az A halmaz elemei, valamint, a pontosan akkor van összekötve a-ból b-be mutató irányított éllel, ha $(a,b) \in R$.

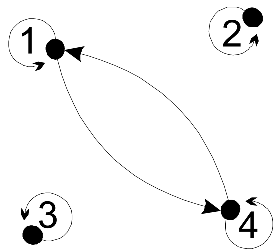
Példa: A={1,2,3,4}



“=” reláció



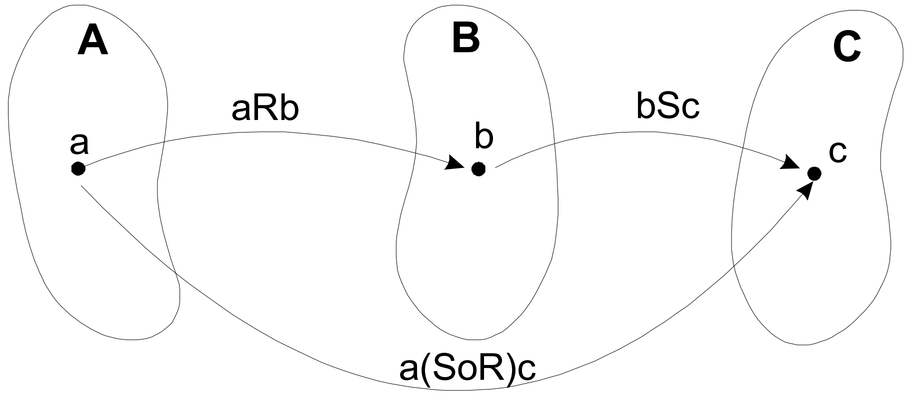
“<” reláció



“mod 3” reláció

2.2 Bináris relációk kompozíciója és inverze

S és R relációk kompozíciója



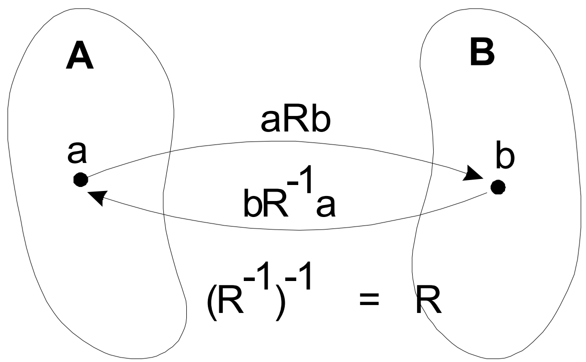
Adottak az **R** és **S** relációk : (A,B,R) és (B,C,S) halmazhármasokkal. A relációk kompozícióján SoR, az (A,C, SoR)-sel megadott relációt értjük, melyre

$$SoR=\{(a,c): (a,b)\in R \text{ és } (b,c)\in S\}$$

Példa: ($\mathbb{Z}$,$\mathbb{Z}$,R) és ($\mathbb{Z}$,$\mathbb{Z}$,S) halmazokkal definiált R és S relációk legyenek: $R=\{(a,b): b=2a\}$, $S=\{(b,c): c=3b\}$

$$SoR=\{(a,c): c=6a\}$$

R reláció inverze.



Az (A,B,R)-rel adott R reláció inverze a (B,A,R^{-1}) halmazhármassal adott R^{-1} reláció , melyre

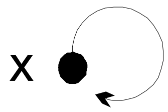
$$R^{-1}=\{(b,a): (a,b)\in R\}.$$

Példa: ($\mathbb{Z}$,$\mathbb{Z}$,R), ahol $R=\{(a,b): a<b\}$ $R^{-1}=\{(b,a): a<b\}$

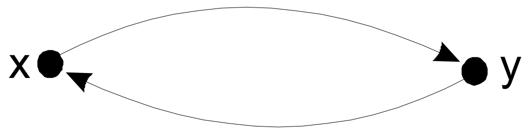
2.3 Homogén bináris relációk (A,A,R) tulajdonságai

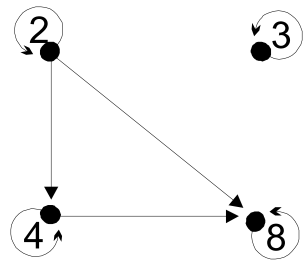
Példa: A = {2,3,4,8}

(a) Reflexivitás: minden $x \in$ A-ra teljesül, hogy xRx

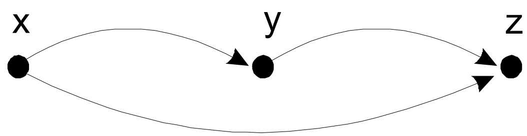


(b) Szimmetria: minden $x,y \in$ A-ra teljesül, ha xRy, akkor yRx.



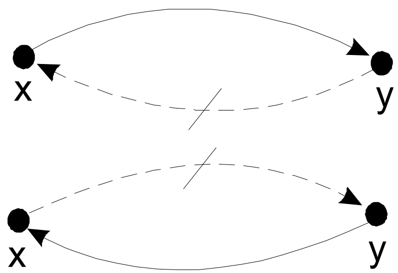


(c) Tranzitivitás: minden $x,y,z \in$ A-ra teljesül, ha xRy és yRz, akkor xRz.



Az oszthatósági reláció reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív

(d) Antiszimmetria: minden $x,y \in$ A-ra teljesül, ha xRy és yRx, akkor x=y.



2.4 Ekvivalencia-relációk

Ekvivalencia-reláció: M felett értelmezett E homogén, bináris reláció ekvivalencia-reláció, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

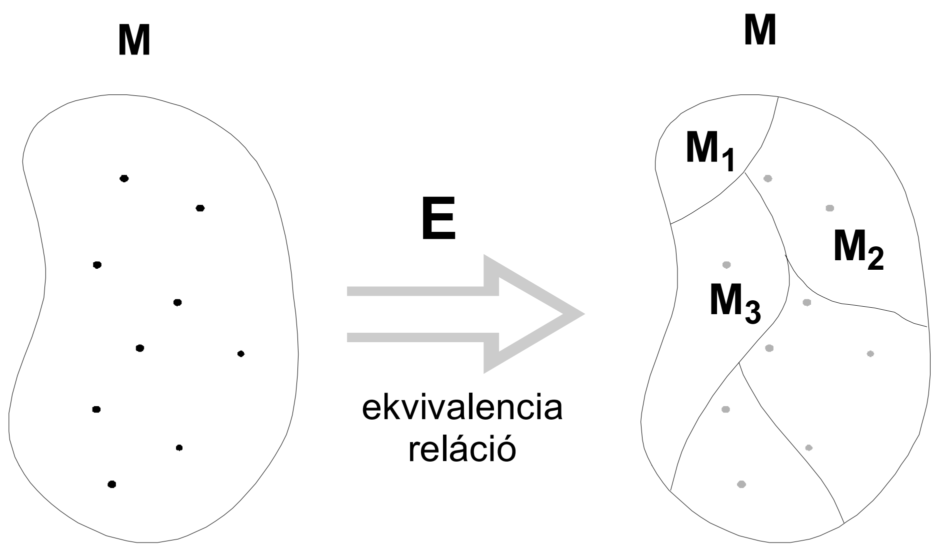
Ekvivalenciaosztály: M felett értelmezett E ekvivalencia-reláció esetén valamely $x \in M$-mel relációban álló elemek halmazát M(x) ekvivalencia-osztálynak nevezzük.

Állítás:

1. Bármely $x,y \in M$ esetén két eset lehetséges:
   $M(x) = M(y)$ pontosan akkor, ha $(x,y) \in E$,
   $M(x)$ és $M(y)$ diszjunktak, ha $(x,y) \notin E$.
2. Minden $x \in M$ pontosan egy ekvivalencia-osztályba tartozik.

Következmény:
Az E reláció M halmazt páronként diszjunkt halmazokra (ekvivalencia-osztályokra) bontja.

Megfordítása:
M minden osztályához tartozik egy ekvivalenciareláció: minden $x,y \in M$ esetén xEy pontosan akkor igaz, ha x és y M azonos osztályának elemei.



Faktorhalmaz: $M \mid E = \{M_1, M_2, \ldots\}$

Példa: Legyen n>1 tetszőleges rögzített egész. A $\mathbb{Z}$-n értelmezett mod n reláció: E={(x,y): x≡y mod n}.

Az E reláció ekvivalencia-reláció:

1. reflexivitás: x≡x mod n, $x\in\mathbb{Z}$.
2. szimmetria: Ha x≡y mod n, akkor y≡x mod n, $x,y\in\mathbb{Z}$.
3. tranzitivitás: Ha x≡y mod n és y≡z mod n, akkor x≡z mod n, $x,y,z\in\mathbb{Z}$.

Ekvivalencia-osztályok:

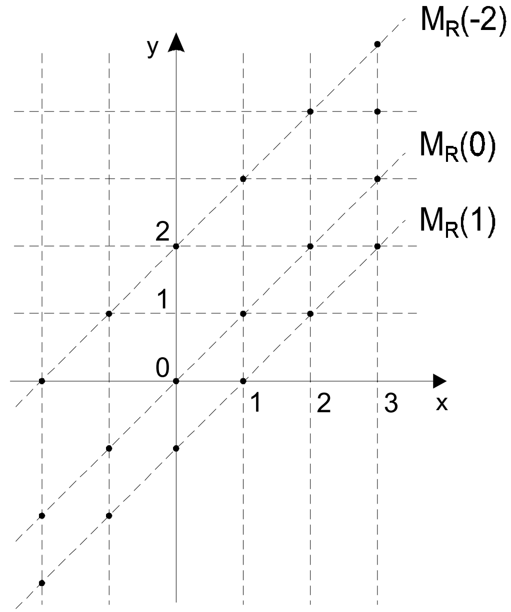
$M_0=\{x: x\equiv 0 \bmod n\}$, $M_1=\{x: x\equiv 1 \bmod n\}$, $M_2=\{x: x\equiv 2 \bmod n\}$…, $M_{n-1}=\{x: x\equiv n-1 \bmod n\}$

Példa: Legyen R reláció $\mathbb{Z}^2$-n értelmezve:

$$(x_1,y_1)R(x_2,y_2), \text{ ha } x_1+y_2=x_2+y_1.$$

A reláció ekvivalencia-reláció, végtelen sok ekvivalencia-osztálya van:

$a\in\mathbb{Z}$-hez tartozó ekvivalencia-osztály: $M_R(a)=\{(x,y): x-y=a,\ x,y\in\mathbb{Z}\}$.



2.5 Parciális (részben) rendezési reláció

M felett értelmezett R relációt *parciális rendezési reláció*nak nevezünk, ha R reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív.

R jele: $\preccurlyeq$. Az (M; $\preccurlyeq$)-t *rendezett halmaz*nak nevezzük.

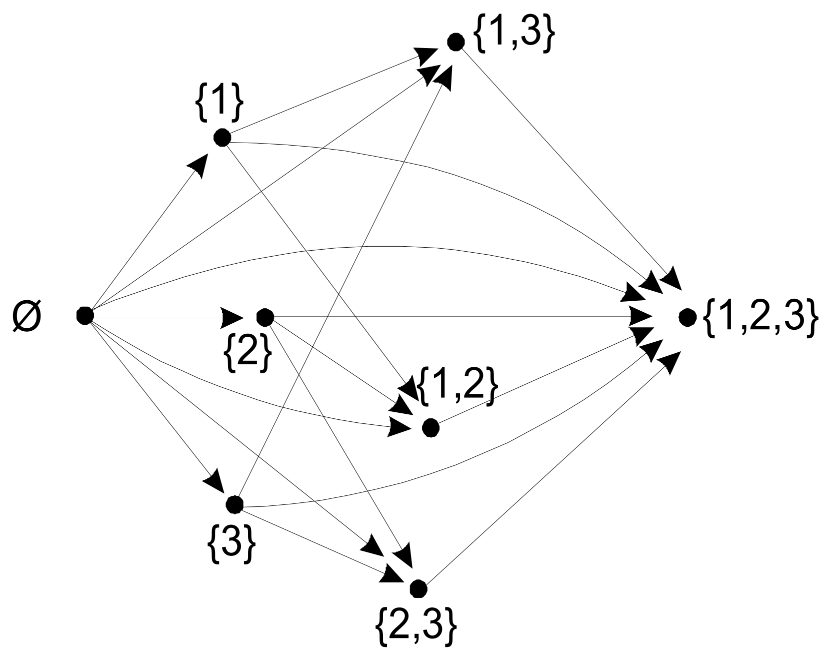
Példa: A halmaz részhalmazainak halmazán értelmezett részhalmaz reláció: $(P(A); \subseteq)$

Szigorú (parciális) rendezés, ha R antiszimmetrikus és tranzitív.

Példa: A valós számok halmazán értelmezett „kisebb” reláció: $(\mathbb{R};<)$

A (parciális) rendezés *teljes*, ha M bármely két eleme relációban van egymással. (Lánc)

Példa: $(\mathbb{R};<)$ és $(\mathbb{R};\leq)$ teljes rendezések



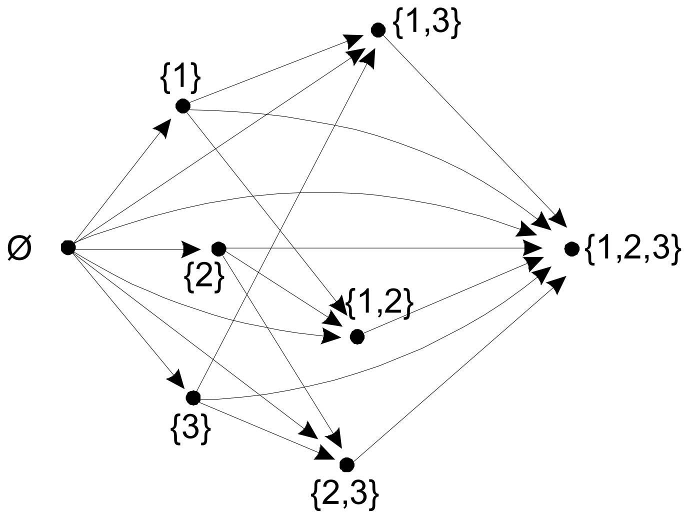
$(P(A); \subseteq)$ rendezett halmaz, ha $A=\{1,2,3\}$.

Hasse-diagramm

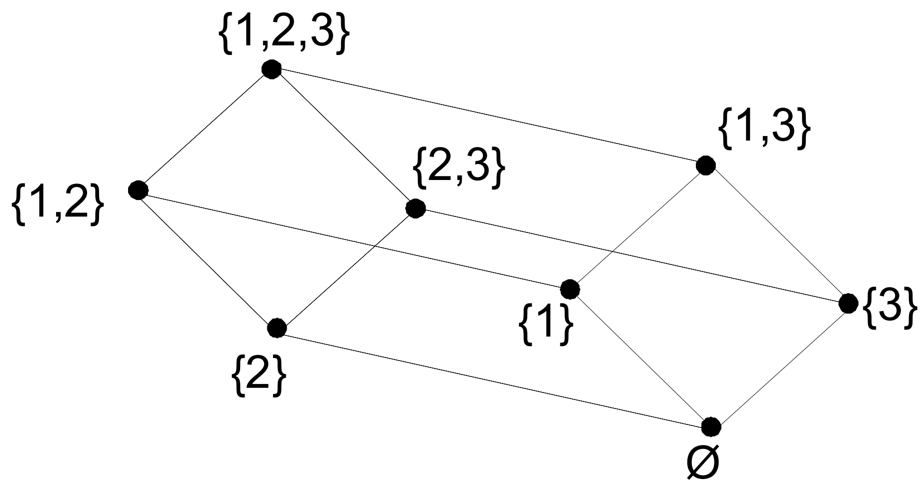
(Parciálisan rendezett halmaz egy lehetséges ábrázolási módja)

$(P(A); \subseteq)$ rendezett halmaz, ha $A=\{1,2,3\}$.

Ábrázolás (korábban definiált módon)



$(P(A); \subseteq)$ Hasse diagrammja



A Hasse diagrammban, ha $x \preccurlyeq y$, akkor y az x felett van. (Ezzel a nyilak elhagyhatók).

Megállapodunk abban, ha $x \preccurlyeq y$ és x össze van kötve pontokon keresztül y-nal, akkor x-et és y-t nem kötjük össze újabb éllel.

(M; $\preccurlyeq$) rendezett halmaz néhány nevezetes eleme

M *legnagyobb eleme* $m \in M$, ha minden $x \in M$-re teljesül, hogy $x \preccurlyeq m$.

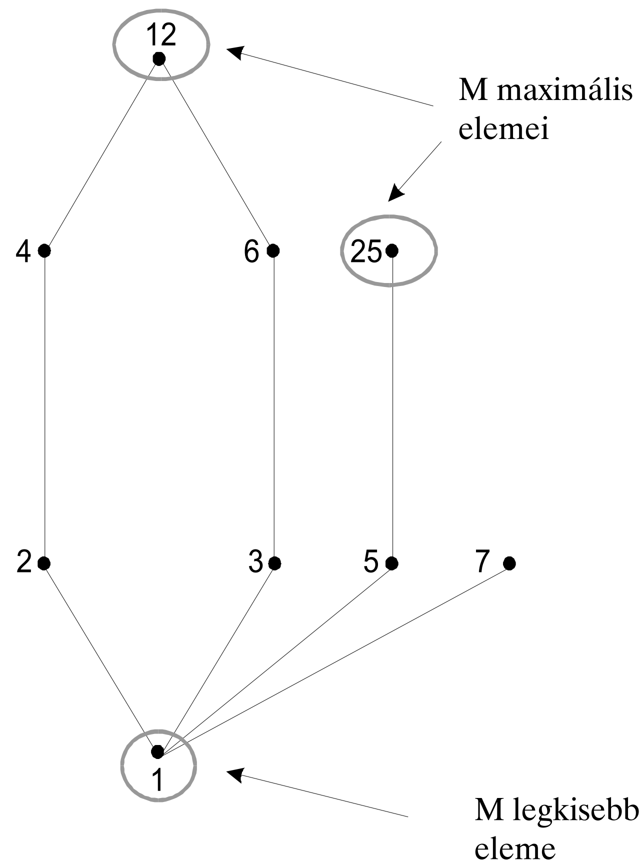
M *legkisebb eleme* $m \in M$, ha minden $x \in M$-re teljesül, hogy $m \preccurlyeq x$.

M *maximális eleme* $b \in M$, ha nincs olyan $x \in M$, hogy $b \preccurlyeq x$.

M *minimális eleme* $b \in M$, ha nincs olyan $x \in M$, hogy $x \preccurlyeq b$.

$M = \{2,3,4,5,6,7,12,25\}$,

$x \preccurlyeq y$, ha x osztója y-nak.

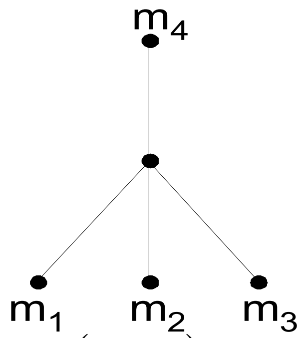


Tétel: Ha az (M; $\preccurlyeq$) halmazban van legnagyobb (legkisebb) elem, akkor az egyértelmű.

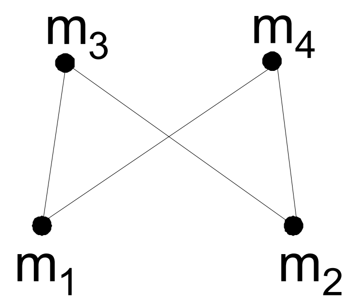
Szuprémum és infimum

Az $(M; \preccurlyeq)$ halmaz $m_1,m_2,\ldots,m_n$ elemek *szuprémuma* $\sup(m_1,m_2,\ldots,m_n) \in M$, ha

- $m_i \preccurlyeq \sup(m_1,m_2,\ldots,m_n)$, $i=1,2,\ldots,n$
- minden olyan m-re, amelyikre $m_i \preccurlyeq m$, $i=1,2,\ldots,n$ igaz, hogy $\sup(m_1,m_2,\ldots,m_n) \preccurlyeq m$.



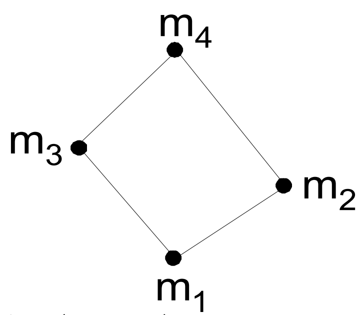
$\sup(m_1,m_4)=m_4$
$\sup(m_1,m_2,m_3)=m_4$



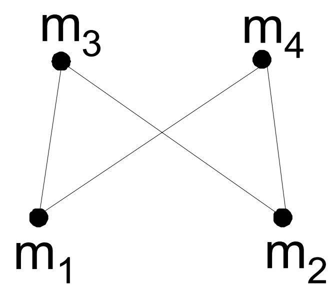
$\sup(m_1,m_2)$ nincs,
$\sup(m_1,m_4)=m_4$

Az $(M; \preccurlyeq)$ halmaz $m_1,m_2,\ldots,m_n$ elemek *infimuma* $\inf(m_1,m_2,\ldots,m_n) \in M$, ha

- $m_i \preccurlyeq \inf(m_1,m_2,\ldots,m_n)$, $i=1,2,\ldots,n$
- minden olyan m-re, amelyikre $m \preccurlyeq m_i$, $i=1,2,\ldots,n$ igaz, hogy $m \preccurlyeq \inf(m_1,m_2,\ldots,m_n)$.



$\inf(m_2,m_4)=m_2$
$\inf(m_2,m_3,m_4)=m_1$

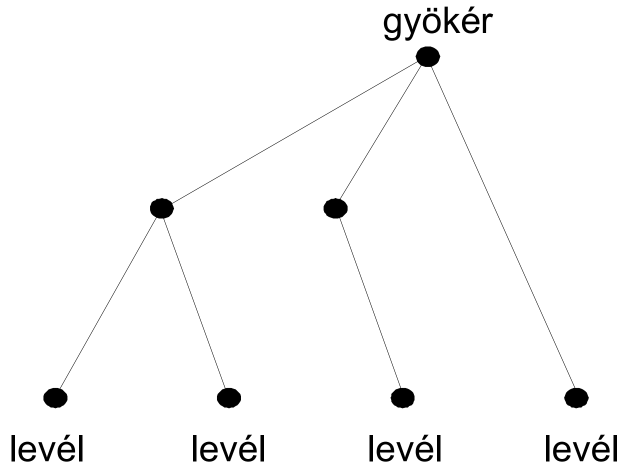


$\inf(m_1,m_2)$ nincs,
$\inf(m_1,m_4)=m_1$

Tétel: Ha az $(M; \preccurlyeq)$ halmaz $m_1,m_2,\ldots,m_n$ elemének van szuprémuma (infimuma), akkor az egyértelmű.

2.6 Struktúrák parciálisan rendezett halmazokon

Fa



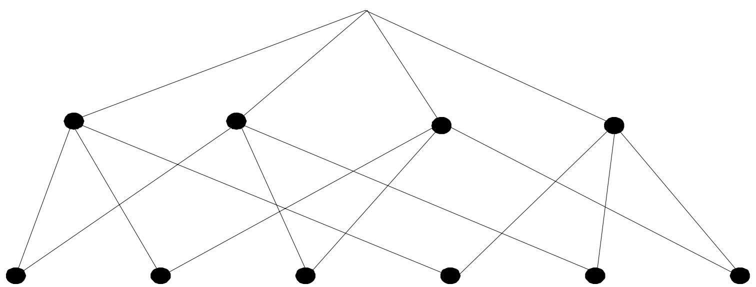
Az **(F; $\preccurlyeq$)** halmazt, amelyre az alábbiak teljesülnek ***fának*** nevezzük:

- F-nek van legnagyobb eleme,
- $\forall x \in F$-re az $\{y: x \preccurlyeq y, y \in F\}$ véges, lineárisan rendezett halmaz.

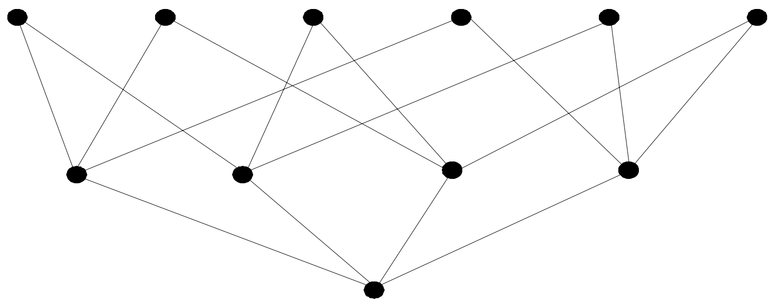
A legnagyobb elemet a *fa gyökerének* nevezzük, a minimálisakat pedig a *fa leveleinek*.

Félháló

Ha (M; $\preccurlyeq$) rendezett halmazban bármely a, $b \in$ M-nek van szuprémuma (infimuma), akkor M a szuprémum(infimum) művelettel félhálót alkot.



<M, sup>
félháló



<M, inf>
félháló

Háló

Tegyük fel, hogy a **(H; $\preccurlyeq$)** rendezett halmaz bármely két elemének van szuprémuma és infimuma.

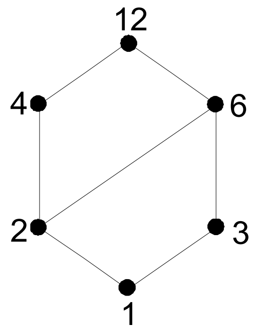
$$a \wedge b = \inf(a,b) \qquad a \vee b = \sup(a,b)$$

Ekkor azt mondjuk, hogy a $\langle H, \wedge, \vee \rangle$ kétműveletes struktúra *hálót* alkot.

Tétel: Hálóban igazak az alábbi műveleti tulajdonságok:

$a \vee a = a$	$a \wedge a = a$
$a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge a$
$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$
$a \vee (a \wedge b) = a$	$a \wedge (a \vee b) = a$

Példa: $(\{1,2,3,4,6,12\}, \preccurlyeq)$, ahol $a \preccurlyeq b$, ha $a \mid b$ háló.

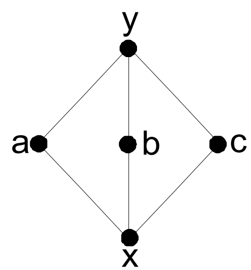


$a \vee b = \sup(a,b) = \text{lkkt}(a,b)$
$a \wedge b = \inf(a,b) = \text{lnko}(a,b)$

Disztributív hálónak nevezzük a hálót, ha a két műveletre igazak a disztributivitási törvények:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Példa: nem disztributív hálóra



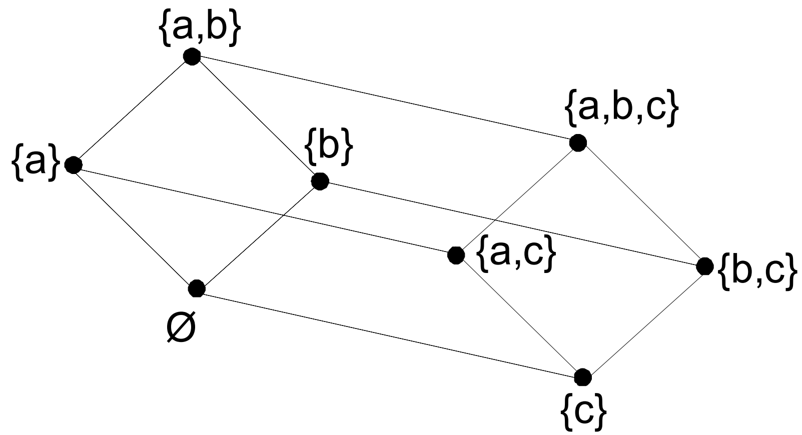
$a \vee (b \wedge c) \neq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
$a \vee x \neq y \wedge y$
$a \neq y$

Boole-algebra

Legyenek (B; $\preccurlyeq$) rendezett legalább két elemű halmazra igazak az alábbiak:

- B-nek van legkisebb eleme és legnagyobb eleme: $\mathbb{O}$ és $\mathbb{I}$.
- <B,inf,sup> disztributív háló.
- minden $b \in B$-hez van olyan (-b) elem, hogy
- $\inf(b,(-b)) = \mathbb{O}$
- $\sup(b,(-b)) = \mathbb{I}$.

Ekkor azt mondjuk, hogy a <B, inf,sup,-> struktúra *Boole algebra*.



Példa: A (P(A);$\subseteq$) rendezett halmaz (P(A) az $A \neq \emptyset$ hatványhalmaza) Boole-algebrát alkot az unió, metszet és komplementer műveletekkel:

$\inf(X,Y)=X\cap Y$
$\sup(X,Y)=X\cup Y$, ahol $X,Y\subseteq A$.

$(-X)=\overline{X}$, ahol $X\subseteq A$.

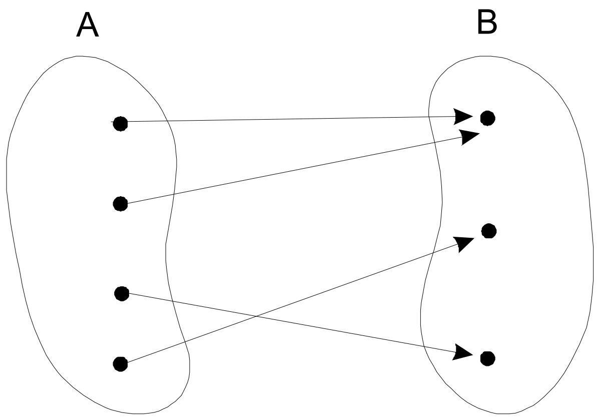
$\mathbb{O}=\emptyset$, $\mathbb{I}=A$

3. Függvényrelációk (függvények)

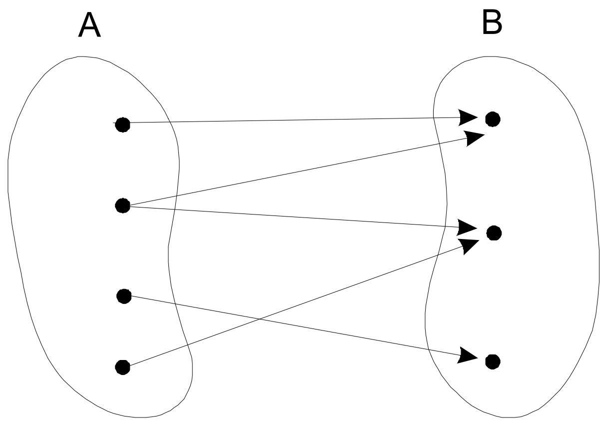
Az (A,B,F) bináris relációt A-t B-be képező *parciális leképezésnek* (függvénynek) nevezzük, ha minden $a \in A$-hoz legfeljebb egy $b \in B$
létezik, melyre $(a,b) \in S$.

Jelölések:
(A,B,F) parciális leképezés: $F: A \to B$.
$(a,b) \in F$: $F(a)=b$ vagy $F: a \mapsto b$

Azt mondjuk, hogy "b" az "a" *képe*, "a" pedig "b" *őse*.



Parciális leképezés
(minden $a \in A$-ból legfeljebb egy nyíl indul ki.)

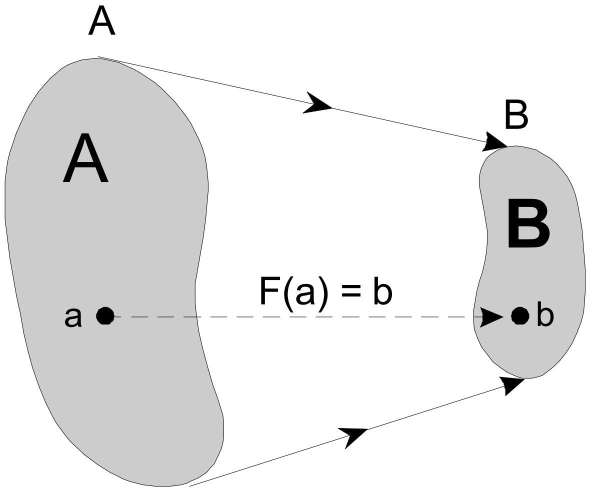


Nem parciális leképezés.

Azt mondjuk, hogy az $F: A \to B$ parciális leképezés *függvény,* ha a leképezés értelmezési tartománya az A halmaz.

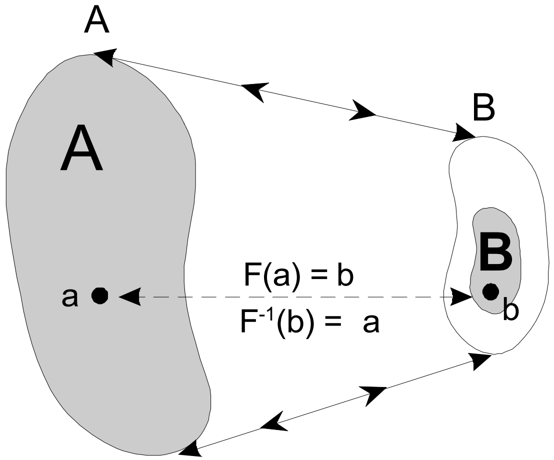
3.1 Függvények (leképezések) tulajdonságai

Szürjekció (ráképezés)



Minden b∈B-nek van őse.

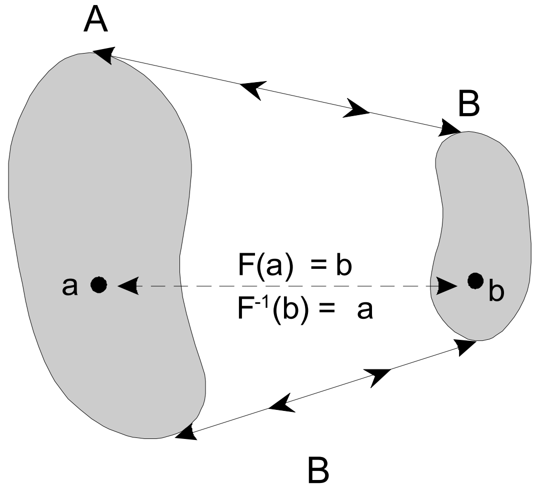
Injekció (kölcsönösen egyértelmű leképezés)



Különböző a∈A elemek képei különbözőek:

Minden b∈B-nek legfeljebb egy őse van.

Bijekció (kölcsönösen egyértelmű ráképezés)

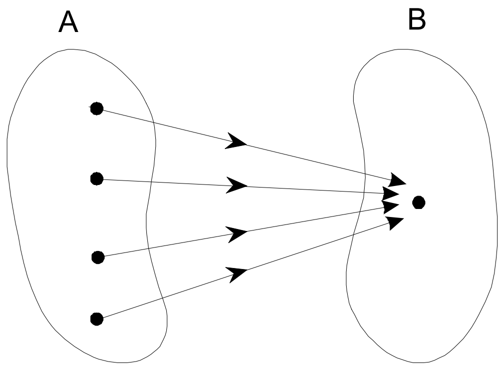


Szürjektív és injektív.

3.2 Speciális leképezések

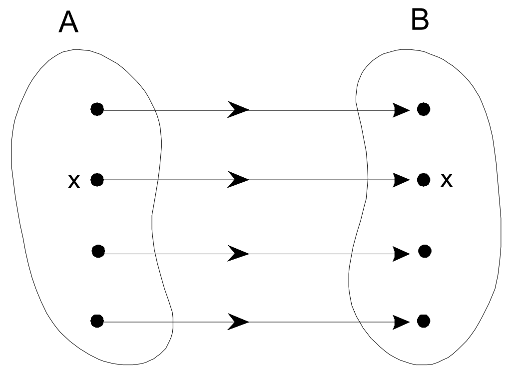
Konstans leképezés:

f: $A \to B$, ahol $f(x)=f(y)$ minden $x,y \in A$

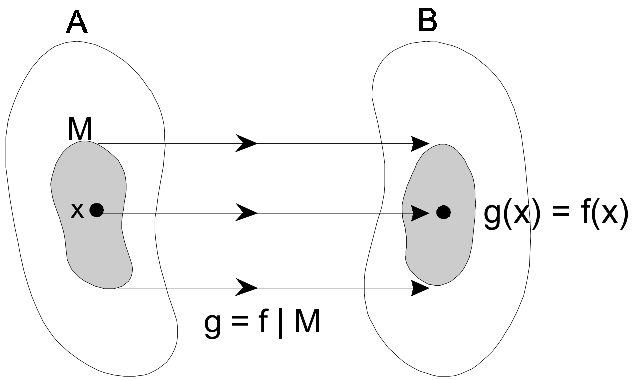


Azonos leképezés:

1_A: $A \to A$, ahol $1_A(x)=x$ minden $x \in A$



Leszűkítés, kiterjesztés: Legyenek az f: $A \to B$ és g: $M \to B$ függvényekre igazak, hogy $M \subseteq A$ és $g(x)=f(x)$, ha $x \in M$.



A g függvény *f leszűkítése*,

az f függvény *g kiterjesztése.*

Jelölés: $g=f|M$

3.3 Leképezések kompozíciója és inverze

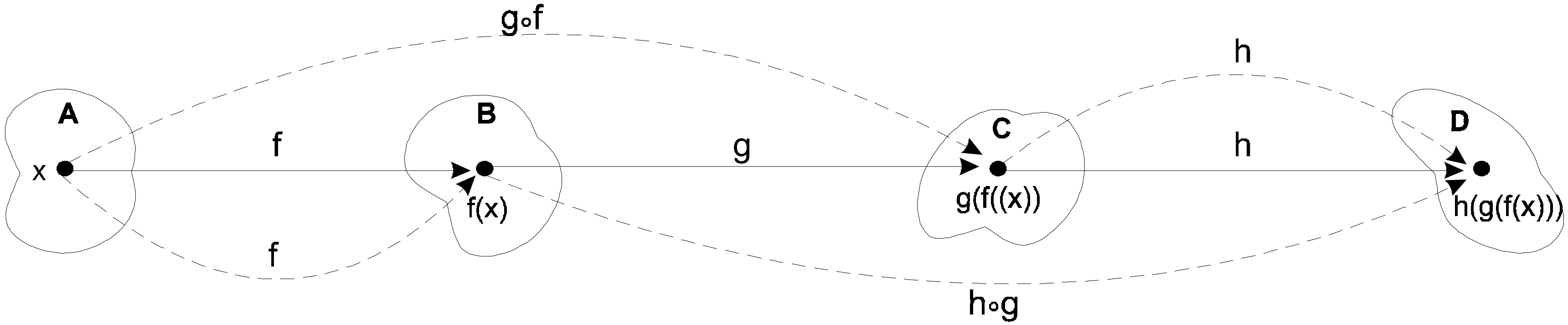
g: $A \to B$ és f: $B \to C$ **kompozíció**ja fog: $A \to C$, ahol $(f o g)(x)=f(g(x))$.
Megjegyzés: a definíció a relációk kompozíciójával analóg.

A kompozíció tulajdonságai

- A szürjekció, injekció, bijekció tulajdonságok *öröklődnek*:
  f és g szürjektív (injektív, bijektív) $\Rightarrow$ fog is szürjektív (injektív, bijektív).

- f: $A \to B$ $\Rightarrow$ $f \text{ o } 1_A = f$ és $1_B \text{ o } f = f$.

- A kompozíció művelete asszociatív.



ho(gof) = (hog) of