Bevezetés a matematikába 1.

Definíciók, vizsgakérdések

Tételek

Logikai alapok – Halmazelméleti alapfogalmak

1. Mi lehet predikátumok értéke? Hogyan jelöljük?

A predikátumok értéke változóiktól függően lehet igaz (jele: ↑) vagy hamis (jele: ↓).

2. Mondjon legalább három példát predikátumra.

Például a síkgeometriában predikátumok: E(x) („x egyenes”), P(x) („x pont”), I(x) („x illeszkedik y-ra”).

3. Sorolja fel a logikai jeleket.

A logikai formulák alkotóelemei: ¬(„nem”), ∧ („és”), ∨ („vagy”), ⇒(„ha ... akkor ...”) és ⇔(„akkor és csak akkor” vagy „pontosan akkor”).

4. Milyen kvantortokat ismer? Mi a jelük?

A logikai formulák alkotóelemei: ∃(„létezik” vagy „van olyan”) egzisztenciális kvantor és a ∀ („minden”) univerzális kvantor.

5. Hogyan kapjuk a logikai formulákat?

A logikai formulák (vagy mondatok) az adott elmélet predikátumaiból épülnek fel a logikai jelek, valamint a két kvantor segítségével.

6. Mikor van egy változó egy kvantor hatáskörében?

Egy formula egy (∃xA) vagy (∀xA) típusú részformulája esetén az x változó minden, a két zárójel közötti előfordulására (a kvantor után vagy A-ban) azt mondjuk, hogy a kvantor hatáskörében van.

7. Mik a nyitott és mik a zárt formulák?

Ha egy formulában egy változó egy adott előfordulása egy kvantor hatáskörében van, akkor azt mondjuk, hogy az adott előfordulás kötött előfordulás, egyébként az adott előfordulás szabad előfordulás. Ha egy változónak egy formulában van szabad előfordulása, akkor azt mondjuk, hogy a változó szabad változó. Ha egy formulának nincs szabad változója, akkor a formulát zárt formulának, egyébként nyitott formulának mondjuk.

8. Mondjon két példát nyitott formulára.

A síkgeometria példájánál maradva, az $((E(x)\wedge P(y))\wedge I(x,y))$ és a $((P(x)\wedge P(y))\wedge\neg x=y)$ formulában x és y szabad változók, így ezek nyitott formulák.

9. Mondjon egy példát zárt formulára.

A $\forall x(E(x) \Rightarrow \exists y(P(x) \wedge I(x,y)))$ zárt formula, mert nincs szabad változója.

10. Milyen predikátumok szerepelnek a halmazelméletben?

A halmazelméletben (az egyenlőségen kívül) a „halmaznak lenni” (nincs jele) és az „eleme” ($x \in A$ azaz x eleme az A halmaznak) predikátum szerepel.

11. Fogalmazza meg a meghatározottság elvét.

Egy halmazt az elemei határoznak meg. Az A és B halmaz akkor és csak akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemeik. Nincs olyasmi, hogy valami „többször eleme” egy halmaznak.

12. Definiálja a részhalmaz és a valódi részhalmaz fogalmát és adja meg a jelöléseiket.

Akkor mondjuk, hogy az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, ha A minden eleme a B halmaznak is eleme. Jele: $A \subset B$ vagy $B \supset A$. Ha A részhalmaza B-nek, de nem egyenlő vele, akkor azt mondjuk, hogy A valódi részhalmaza B-nek. Jele: $A \subseteq B$ vagy $B \supseteq A$ (az alsó vonalak itt át vannak húzva).

13. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik a „részhalmaz” fogalom?

Minden halmaz részhalmaza saját magának (reflexivitás), és ha $A \subset B$, $B \subset C$, akkor $A \subset C$ (tranzitivitás). Ha $A \subset B$ és $B \subset A$, akkor a meghatározottsági axioma szerint az is teljesül, hogy $A=B$ (antiszimmetria).

14. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik a halmazok egyelősége?

A halmazok egyenlősége reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus, és még az is teljesül, hogy ha $A=B$, akkor $B=A$ (szimmetria).

15. Írja le a részhalmaz fogalmát. Milyen jelölést használunk részhalmazok megadására?

Akkor mondjuk, hogy az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, ha A minden eleme a B halmaznak is eleme. Jele: $A \subset B$ vagy $B \supset A$. Ha A részhalmaza B-nek, de nem egyenlő vele, akkor azt mondjuk, hogy A valódi részhalmaza B-nek. Jele: $A \subseteq B$ vagy $B \supseteq A$ (az alsó vonalak itt át vannak húzva).

16. Írja le az üres halmaz fogalmát.

Van olyan halmaz, amelynek nincs eleme.

17. Igaz-e, hogy csak egy üres halmaz van?

Igen. A meghatározottság axiómája miatt csak egy üres halmaz van.

18. Írja le a pár fogalmát. Milyen jelölés kapcsolódik hozzá?

Bármely a és b dologhoz van olyan halmaz, amelynek ezek és csak ezek az elemei. Ekkor $\{a,b\}=\{x \in A: x=a \text{ vagy } x=b\}$.

19. Írja le két halmaz unióját és a megfelelő jelöléseket.

Ha A és B halmazok, akkor azt a halmazt, amelynek pontosan azok a dolgok az elemei, melyek elemei A-nak vagy B-nek (vagy mindkettőnek), $A \cup B$-vel jelöljük, és a két halmaz uniójának nevezzük.

20. Írja le halmazrendszer unióját és a megfelelő jelöléseket.

Ha $\mathcal{A}$ egy halmaz, amelynek elemei mind halmazok, akkor azt a halmazt amely pontosan azokat a dolgokat tartalmazza, amelyek $\mathcal{A}$ valamely elemének az elemei, az $\mathcal{A}$ uniójának nevezzük. Ennek jelölése: $\cup\mathcal{A}$ vagy $\cup\{A:A\in\mathcal{A}\}$ vagy $\cup_{A\in\mathcal{A}}A$.

21. Fogalmazza meg a halmazok uniójának alaptulajdonságait.

Ha A,B,C halmazok, akkor:
(1) $A\cup\emptyset=A$;
(2) $A\cup B=B\cup A$ (kommutativitás);
(3) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ (asszociativitás);
(4) $A\cup A=A$ (idempotencia)
(5) $A\subset B$ akkor és csak akkor, ha $A\cup B=B$.

22. Definiálja halmazrendszer és két halmaz metszetét, és adja meg a jelöléseiket.

Ha A és B halmazok, legyen $A\cap B:=\{x\in A:x\in B\}$. Ha $\mathcal{A}$ halmazok nem üres rendszere, akkor a metszetét a $\cap\mathcal{A}:=\{x:x\in A\forall A\in\mathcal{A}\text{-ra}\}$ összefüggéssel definiáljuk. Más jelölések: $\cap\{A:A\in\mathcal{A}\}$ és $\cap_{A\in\mathcal{A}}A$.

23. Definiálja a diszjunktság és a páronként diszjunktság fogalmát.

Ha $A\cap B=\emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy A és B diszjunktak (vagy idegenek). Általábosabban, ha egy nem üres $\mathcal{A}$ halmazrendszer metszete az üres halmaz, akkor azt mondjuk, hogy a halmazrendszer diszjunkt. Ha a halmazrendszer bármely két halmazának metszete üres, akkor azt mondjuk, hogy elemei páronként diszjunktak. (Más szóhasználatban a páronként diszjunkt halmazokból álló halmazrendszert nevezzük diszjunktnak.)

24. Fogalmazza meg a halmazok metszetének alaptulajdonságait.

Ha A,B,C halmazok, akkor:
(1) $A\cap\emptyset=\emptyset$;
(2) $A\cap B=B\cap A$ (kommutativitás);
(3) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ (asszinciativitás);
(4) $A\cap A=A$ (idempotencia)
(5) $A\subset B$ akkor és csak akkor, ha $A\cap B=A$.

25. Fogalmazza meg az unió és a metszet disztributivitását.

Ha A,B,C halmazok, akkor:
(1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (a metszet disztributivitása az unióra nézve);
(2) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ (az unió disztributivitása a metszetre nézve).

26. Definiálja a halmazok különbségét, szimmetrikus differenciáját és komplementerét.

Az A és B halmazok különbségét (vagy differenciálját) az $A\setminus B:=\{x\in A:x\notin B\}$ összefüggéssel definiáljuk. A két halmaz szimmetrikus differenciálját az $A\triangle B:=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ összefüggéssel definiáljuk. Ha $A\subset X$, akkor az $X\setminus A$ halmazt néha A'-val jelöljük, és az A halmaz X-ra vonatkozó komplementerének nevezzük. Ez természetesen nem csak A-tól, hanem az X „alaphalmaztól" is függ, ami az A' jelölésben nem jut kifejezésre.

27. Fogalmazza meg a halmazok komplementerének alaptullajdonságait.

Ha $A,B \subset X$, akkor
1. $(A')'=A$;
2. $\emptyset'=X$;
3. $X'=\emptyset$;
4. $A \cap A'=\emptyset$;
5. $A \cup A'=X$;
6. $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$;
7. $(A \cup B)'=A' \cap B'$;
8. $(A \cap B)'=A' \cup B'$;

28. Írja le a hatványhalmaz fogalmát. Milyen jelölések kapcsolódnak hozzá?

Ha A halmaz, akkor azt a halmazrendszert, melynek elemei A részhalmazai, az A hatványhalmazának nevezzük. Jele: $\wp(A)$. Tehát minden A halmazhoz létezik egy olyan halmazrendszer, amelynek elemei pontosan A részhalmazai.

Relációk

29. Definiálja a rendezett pár fogalmát és koordinátáit.

Bármely x,y esetén legyen $(x,y):=\{\{x\},\{x,y\}\}$. Az (x,y) rendezett pár első koordinátája x, a második koordinátája y.

30. Definiálja két halmaz Descartes-szorzatát.

Az X,Y halmazok Descartes-szorzatán az $X \times Y:=\{(x,y):x \in X, y \in Y\}$ halmazt értjük.

31. Definiálja a binér reláció fogalmát és adja meg a kapcsolódó jelöléseket.

Egy halmazt binér relációnak (vagy kétváltozós relációnak) nevezünk, ha minden eleme rendezett pár. Ha R egy binér reláció, akkor $(x,y) \in R$ helyett gyakran azt írjuk, hogy xRy, és azt mondjuk, hogy x és y között fennáll az R reláció.

32. Mit jelent az, hogy R reláció X és Y között? Mit jelent az, hogy R egy X-beli reláció?

Ha valamely X és Y halmazokra $R \subset X \times Y$, akkor azt mondjuk, hogy R reláció X és Y között. Ha X=Y, akkor azt mondjuk, hogy R egy X-beli binér reláció (homogén binér reláció).

33. Definiálja a binér reláció értelmezési tartományát és értékkészletét, és adja meg a kapcsolódó jelöléseket.

Az R binér reláció értelmezési tartományát a $dmn(R):=\{x:\exists(x,y) \in R\}$, értékkészletét pedig a $rng(R):=\{y:\exists(x,y) \in R\}$ összefüggéssel értelmezzük. A jelölések a „domain” illetve „range” szóra utalnak; *dom* vagy ***D***, illetve *ran*, ***R*** vagy *im* (az „image” szóból) is szokásosak.

34. Definiálja a binér reláció kiterjesztését, leszűkítését és leszűkítését egy halmazra és adja meg a kapcsolódó jelöléseket.

Az R binér relációt az S binér reláció kiterjesztésének, illetve S-et az R leszűkítésének (vagy megszorításának) nevezzük, ha $S \subset R$. Ha X egy halmaz, az R reláció X-re való leszűkítésén (vagy megszorításán) az $R_{|X}:=\{(x,y) \in R:x \in X\}$ relációt értjük.

35. Definiálja egy binér reláció inverzét, és sorolja fel az inverz három egyszerű tulajdonságát.

Egy R binér reláció inverzén az $R^{-1}:=\{(b,a):(a,b)\in R\}$ binér relációt értjük.
(1) $(R^{-1})^{-1}=R$;
(2) ha R reláció X és Y között, akkor R^{-1} reláció Y és X között;
(3) $\boldsymbol{D}(R^{-1})=\boldsymbol{R}(R)$ és $\boldsymbol{R}(R^{-1})=\boldsymbol{D}(R)$.

36. Definiálja halmaz képét és inverz képét binér relációnál és adja meg a kapcsolódó jelöléseket.

Legyen R egy binér reláció és A egy halmaz. Az A halmaz képe az $R(A):=\{y:\exists x\in A:(x,y)\in R\}$ halmaz. $\boldsymbol{R}(A)$ pontosan akkor üres, ha A és $\boldsymbol{D}(R)$ diszjunktak. Az A halmaz inverz képe az R relációnál $R^{-1}(A)$. Ha $A=\{a\}$, akkor $\boldsymbol{R}(\{a\})$ helyett $\boldsymbol{R}(a)$-t írunk.

37. Definiálja a binér relációk kompozícióját. Lehet-e a kompozíció üres?

Az R és S binér relációk összetételén (kompozícióján, szorzatán) az $R\circ S:=\{(x,y):\exists z: (x,z)\in S\wedge(z,y)\in R\}$ relációt értjük. Két reláció kompozíciója lehet üres: ez a helyzet, ha $\boldsymbol{R}(S)$ és $\boldsymbol{D}(R)$ diszjunktak.

38. Fogalmazzon meg három, binér relációk kompozíciójára vonatkozó állítást.

Legyenek R,S,T binér relációk. Ekkor
(1) ha $\boldsymbol{R}(S)\supset\boldsymbol{D}(R)$, akkor $\boldsymbol{R}(R\circ S)=\boldsymbol{R}(R)$;
(2) $R\circ(S\circ T)=(R\circ S)\circ T$ (asszociativitás);
(3) $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$.

39. Mint jelent az, hogy egy reláció tranzitív, szimmetrikus, illetve dichotom? Ezek közül mi az, ami csak a reláción múlik?

Legyen R egy X-beli binér reláció. Azt mondjuk, hogy R
(1) tranzitív, ha minden x,y,z-re $(x,y)\in R$ és $(y,z)\in R$ esetén $(x,z)\in R$;
(2) szimmetrikus, ha minden x,y-ra $(x,y)\in R$ esetén $(y,x)\in R$;
(3) dichotom, ha minden $x,y\in X$ esetén $(x,y)\in R$ vagy $(y,x)\in R$ (esetleg mindkettő), azaz bármely két elem összehasonlítható.

Ezek közül a tranzitivitás és a szimmetrikusság függ csak a relációtól.

40. Mit jelent az, hogy egy reláció intranzitív, antiszimmetrikus, illetve trichotóm? Ezek közül mi az, ami csak a reláción múlik?

Legyen R egy X-beli binér reláció. Azt mondjuk, hogy R
(1) intranzitív, ha minden x,y,z-re$(x,y)\in R$ és $(y,z)\in R$ esetén $(x,z)\notin R$;
(2) antiszimmetrikus, ha minden x,y-ra $(x,y)\in R$ és $(y,x)\in R$ esetén $x=y$;
(3) trichotom, ha minden $x,y\in X$ esetén $x=y$, $(x,y)\in R$ és $(y,x)\in R$ közül pontosan egy teljesül.

Ezek közül az intranzitivitás és az antiszimmetrikusság függ csak a relációtól.

41. Mint jelent az, hogy egy reláció szigorúan antiszimmetrikus, reflexív illetve irreflexív? Ezek közül mi az, ami csak a reláción múlik?

Legyen R egy X-beli binér reláció. Azt mondjuk, hogy R
1. reflexív, ha minden $x\in X$ esetén $(x,x)\in R$;

2. irreflexív, ha minden $x \in X$ esetén $(x,x) \notin R$;
3. szigorúan antiszimmetrikus, ha minden x,y-ra $(x,y) \in R$ esetén $(y,x) \notin R$;

Ezek közül a szigorúan antiszimmetrikusság függ csak a relációtól.

42. Definiálja az ekvivalenciarelációt, illetve az osztályozás fogalmát.

Legyen X egy halmaz. Az X-beli binér relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív. Az X részhalmazainak egy O rendszerét X osztályozásának nevezzük, ha O páronként diszjunkt nem üres halmazokból álló halmazrendszer, amelyre $\cup O = X$.

43. Mi a kapcsolat az ekvivalenciarelációk és az osztályozások között?

Valamely X halmazon értelmezett ~ ekvivalenciareláció X-nek egy osztályfelbontását adja. Megfordítva, az X halmaz minden osztályfelbontása egy ~ ekvivalenciarelációt hoz létre.

44. Definiálja a részbenrendezés és a részbenrendezett halmaz fogalmát. Mit mondhatunk egy részbenrendezett halmaz egy részhalmazáról?

Egy X halmazbeli részbenrendezés egy tranzitív, reflexív, és antiszimmetrikus X-beli reláció. Egy X részbenrendezett halmaz, illetve rendezett halmaz tulajdonképpen az $(X,\leq)$ pár. Egy X részbenrendezett halmaz minden Y részhalmaza is részbenrendezett, ha a $\leq$ relációt csak ennek az elemei között tekintjük, azaz a $\leq \cap (Y \times Y)$ relációval. Ha az Y részhalmaz ezzel a relációval rendezett, akkor láncnak nevezzük.

45. Definiálja a rendezés, a rendezett halmaz és a lánc fogalmát.

Ha a $\leq$ részbenrendezési reláció dichotom is, azaz ha X bármely két eleme összehasonlítható, akkor rendezésnek nevezzük. Egy X rendezett halmaz tulajdonképpen az $(X,\leq)$ pár. Ha az Y részhalmaz ezzel a relációval rendezett, akkor láncnak nevezzük.

46. Mondjon példát részbenrendezett de nem rendezett halmazra.

A természetes számok körében az „n osztja m-et” reláció részbenrendezés, de nem rendezés.

47. Definiálja egy relációnak megfelelő szigorú illetve gyenge reláció fogalmát.

Egy X-beli reláció R relációhoz definiálhatunk egy X-beli S relációt úgy, hogy xSy akkor álljon fenn, ha xRy de $x \neq y$, ez az R-nek megfelelő szigorú reláció. Megfordítva, egy X-beli R relációhoz a megfelelő T gyenge relációt úgy definiáljuk, hogy legyen xTy, ha xRy vagy x=y.

48. Definiálja a szigorú részbenrendezést és fogalmazza meg kapcsolatát a részbenrendezéssel.

Egy $\leq$ részbenrendezés esetén a megfelelő szigorú relációt $<$-el jelöljük; ez tranzitív, irreflexív és szigorúan antiszimmetrikus. Megfordítva ha $<$ egy X-beli szigorú részbenrendezés, amin egy tranzitív és szigorúan antiszimmetrikus relációt értünk, akkor a megfelelő gyenge reláció egy részbenrendezés.

49. Mi az, hogy kisebb, nagyobb, megelőzi, követi? Adja meg a kapcsolódó jelöléseket.

Ha $x<y$, akkor azt mondjuk, hogy x kisebb, mint y vagy y nagyobb, mint x, illetve hogy x megelőzi y-t vagy y követi x-et. A gyenge reláció esetén hozzátesszük, hogy „vagy egyenlő”.

50. Definiálja az intervallumokat és adja meg a kapcsolódó jelöléseket.

Legyen X egy részbenrendezett halmaz. Ha $x \leq z$ és $z \leq y$, akkor azt mondjuk, hogy z az x és y közé esik, ha pedig $x<z$ és $z<y$, akkor azt mondjuk, hogy z szigorúan x és y közé esik. Az összes ilyen elemek halmazát [x,y], illetve]x,y[jelöli.

51. Mi az, hogy közvetlenül követi illetve közvetlenül megelőzi?

Ha $x<y$, de ugyanakkor nem létezik szigorúan x és y közé eső elem, akkor azt mondjuk, hogy x közvetlenül megelőzi y-t, vagy y közvetlenül követi x-et.

52. Definiálja a kezdőszelet fogalmát, és adja meg a kapcsolódó jelöléseket.

Legyen X egy részbenrendezett halmaz. Egy x elemhez tartozó kezdőszeletnek a $\{y \in X : y<x\}$ részhalmazt nevezzük. A kezdőszelet logikus, de nem elterjedt jelölése $]\leftarrow,x[$.

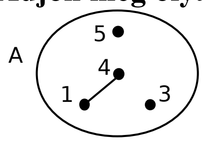
53. Definiálja a legkisebb és a legnagyobb elem fogalmát.

Az X részbenrendezett halmaz legkisebb (vagy első) elemén egy olyan $x \in X$ elemet értünk, amelyre $x \leq y$ minden $y \in X$-re. Nem biztos, hogy van ilyen elem, de ha van, akkor egyértelmű. Hasonlóan, X legnagyobb (vagy utolsó) elemén egy olyan x elemet értünk, amelyre $y \leq x$ minden $y \in X$ -re. Nem biztos, hogy van ilyen elem, de ha van, akkor egyértelmű.

54. Definiálja a minimális és maximális elem fogalmát, és adja meg a kapcsolódó jelöléseket.

Legyen $x \in X$. Az x-et minimálisnak nevezzük, ha nincs nála kisebb elem, maximálisnak pedig akkor, ha nincs nála nagyobb elem. Maximális és minimális elem lehet több is. Jelölések: min X, max X.

55. Adjon meg olyan részbenrendezett halmazt, amelyben több minimális elem van.



Az A részbenrendezett halmaz Hasse-diagramja a következő. Ezen esetben két minimális elem létezik: 1,3.

56. Adjon meg olyan részbenrendezett halmazt, amelyben nincs maximális elem.

A természetes számok halmaza ilyen a szokásos rendezéssel.

57. Igaz-e, hogy rendezett halmazban a legkisebb és a minimális elem fogalma egybeesik?

Igen. Minimális és maximális elem több is lehet, és hogy ha X rendezett, akkor a legkisebb és a minimális elem fogalma, illetve a legnagyobb és a maximális elem fogalma egybeesik, de egyébként nem feltétlenül.

58. Definiálja az alsó és a felső korlát fogalmát.

Egy X részbenrendezett halmaz egy x elemét az Y részhalmaz alsó korlátjának nevezzük, ha minden $y \in Y$-ra $x \leq y$. Ha minden $y \in Y$-ra $y \leq x$ akkor x az Y felső korlátja. Ha létezik alsó illetve felső korlát, akkor azt mondjuk, hogy Y alulról illetve felülről korlátos.

59. Igaz-e, hogy ha egy részbenrendezett halmaz egy részhalmaza tartalmaz a részhalmaz alsó korlátjai közül elemeket, akkor csak egyet?

Igen, ha az alsó korlátok között van olyan, mely eleme a részhalmaznak, úgy csak egy ilyen van.

60. Definiálja az alsó és felsőhatár tulajdonságot.

???

61. Igaz-e, hogy ha egy részbenrendezett halmaz egy részhalmaza tartalmazza a részhalmaz egy alsó korlátját, akkor az a részhalmaznak minimális eleme?

Igen, ha az alsó korlátok között van olyan, mely eleme a részhalmaznak, úgy csak egy ilyen van, és ez a részhalmaz legkisebb eleme (minimális eleme).

62. Definiálja az infimum és szuprémum fogalmát.

Az alsó korlátok halmazában van legnagyobb elem, akkor azt Y legnagyobb alsó korlátjának nevezzük, idegen szóval ez az infimum, és inf Y-al jelöljük. Hasonlóan, ha Y felső korlátjai halmazában van legkisebb elem, akkor azt Y legkisebb felső korlátjának nevezzük, idegen szóval ez a szuprémum, és sup Y-al jelöljük.

63. Definiálja a jólrendezés és jólrendezett halmaz fogalmát.

Egy X részbenrendezett halmazt jólrendezettnek, részbenrendezését pedig jólrendezésnek nevezzük, ha X bármely nem üres részhalmazának van legkisebb eleme. Jól rendezett halmaz mindig rendezett.

64. Adjon meg olyan rendezett halmazt, amely nem jólrendezett.

Az egész, racionális és valós számok halmaza nem jólrendezett de rendezett a szokásos rendezéssel.

XXX Van-e olyan jólrendezett halmaz, amely nem rendezett?

Nincs. Jólrendezett halmaz mindig rendezett.

65. Adjon példát jólrendezett halmazra.

A természetes számok halmaza jólrendezett a szokásos rendezéssel.

66. Adjon meg két részbenrendezett halmaz Descartes-szorzatán a halmazok részbenrendezései segítségével két részbenrendezést.

Legyenek X és Y részbenrendezett halmazok. Az $X \times Y$-ban legyen $(x,y) \leq (x',y')$, ha $x \leq x'$ az X-ben, és $y \leq y'$ az Y-ban. Így egy részbenrendezést kapunk. Legyen $(x,y) \leq (x',y')$, ha $x < x'$ vagy $x = x'$ és $y \leq y'$ $X \times Y$-nak ezt a részbenrendezését lexikografikus rendezésnek nevezzük.

67. Két jólrendezett halmaz Descartes-szorzatán a lexikografikus részbenrendezést tekintjük. Mit állíthatunk erről?

Ha X és Y rendezettek, illetve jólrendezettek, akkor $X \times Y$ is rendezett, illetve jólrendezett a lexikografikus részbenrendezéssel.

Függvények

68. Definiálja a függvény fogalmát. Ismertesse a kapcsolódó jelöléseket.

Egy függvény egy olyan f reláció, amelyre ha $(x,y)\in f$ és $(x,y')\in f$, akkor $y=y'$, másszóval minden x-hez legfeljebb egy olyan y létezik, amelyre $(x,y)\in f$. Jelölések: $f(x)=y$. Az y elemet az f függvény x helyén (argumentumában) felvett értékének nevezzük. Egyéb jelölés: $f:x\mapsto y$.

69. Mi a különbség a között, hogy $f\in X\to Y$ és hogy $f:X\to Y$?

Annak kifejezésére, hogy az f függvény értelmezési tartománya a teljes X halmaz, értékkészlete pedig az Y halmaznak részhalmaza az $f:X\to Y$ jelölés szolgál, amit úgy olvasunk ki, hogy f az X-et Y-ba képező függvény. Ez nem ugyanaz, mint $f\in X\to Y$, mert utóbbi esetben $\boldsymbol{D}(f)\subsetneq X$ is lehetséges.

70. Mikor nevezünk egy függvényt kölcsönösen egyértelműnek?

Az f függvényt kölcsönösen egyértelműnek nevezzük, ha $f(x)=y$ és $f(x')=y$ esetén $x=x'$. Ez azzal ekvivalens, hogy az f^{-1} reláció függvény. Másnéven injektívnek nevezzük a kölcsönösen egyértelmű függvényeket.

71. Igaz-e, hogy az identikus leképezés mindig szürjektív?

Igen. Ezt I_x-ként jelöljük, és X-nek X-re való identikus leképezésének nevezünk.

72. Definiálja a permutáció fogalmát.

Egy halmaz permutációján a halmaznak önmagára való kölcsönösen egyértlemű leképezését értjük.

73. Igaz-e, hogy két függvény összetétele függvény?

Igen. Ha f és g függvények, akkor $f\circ g$ is.

74. Mikor állíthatjuk hogy két függvény összetétele injektív, szürjektív illetve bijektív?

Ha f és g kölcsönösen egyértelmű függvények, akkor $f\circ g$ is. Ha az f függvény X-et Y-ra képezi le, a g függvény pedig Y-t Z-re képezi le, akkor $g\circ f$ az X-et Z-re képezi le. Ha két függvény összetétele injektív és szürjektív, akkor bijektív is.

75. Mi a kapcsolat függvények és ekvivalenciarelációk között?

Ha az X halmazon adott egy ekvivalenciareláció, akkor az x elemhez az ekvivalenciaosztályát rendelő leképezést kanonikus leképezésnek nevezzük. Megfordítva, ha $f:X\to Y$ egy függvény, akkor az $x\sim x'$, ha $f(x)=f(x')$ reláció egy ekvivalenciareláció.

76. Mikor nevezünk egy függvényt monoton növekedőnek illetve monoton csökkenőnek?

Legyenek X és Y részbenrendezett halmazok. Az $f:X\to Y$ függvényt monoton növekedőnek nevezzük, ha $x,y\in X$, $x\leq y$ esetén $f(x)\leq f(y)$ illetve monoton csökkenőnek nevezzük, ha $x,y\in X$ $x\leq y$ esetén $f(x)\geq f(y)$.

77. Mikor nevezünk egy függvényt szigorúan monoton növekedőnek illetve szigorúan monoton csökkenőnek?

Legyenek X és Y részbenrendezett halmazok. Az $f:X\to Y$ függvényt szigorúan monoton növekedőnek nevezzük, ha $x,y\in X$, $x<y$ esetén $f(x)<f(y)$ illetve szigorúan monoton csökkenőnek nevezzük, ha $x,y\in X$, $x<y$ esetén $f(x)>f(y)$.

78. Mi a kapcsolat szigorúan monoton növekedő függvények, a kölcsönösen egyértelmű függvények és az inverz függvények között?

Ha X,Y rendezettek, akkor szigorúan monoton növekedő (illetve csökkenő) függvény nyilván kölcsönösen egyértelmű. Megfordítva, ha X,Y rendezettek, akkor egy $f:X\to Y$ kölcsönösen egyértelmű monoton növekedő (illetve csökkenő) leképezés szigorúan monoton növekedő (illetve csökkenő) is, és az inverze is monoton növekedő (illetve csökkenő) f(X)-en.

79. Mit állíthatunk a monoton növekedő függvények inverz függvényéről?

???

80. Mit értünk indexhalmaz, indexezett halmaz és család alatt?

Egy x függvény i helyen felvett értékét neha x_i-vel jelöljük. Ilyenkor gyakran a függvény I értelmezési tartományát indexhalmaznak, az elemeit indexeknek, értékkészletét indexelt halmaznak, az x függvényt magát pedig családnak nevezzük.

81. Definiálja a halmazcsaládok unióját és metszetét.

Ha az értékkészlet elemei halmazok, akkor halmazcsaládról beszélünk. Egy X_i, $i\in I$ halmazcsalád unióját a $\cup_{i\in I}X_i:=\cup\{X_i:i\in I\}$ összefüggéssel értelmezzük. Rövidebb jelölése: $\cup_i X_i$. Ha $I\neq\emptyset$, akkor a halmazcsalád metszetét is definiáljuk a $\cap_{i\in I}X_i:=\cap\{X_i:i\in I\}$.

82. Fogalmazza meg a halmazcsaládokra vonatkozó De Morgan-szabályokat.

Ha X_i, $i\in I$ az X halmaz részhalmazainak egy nem üres családja (azaz $I\neq\emptyset$), akkor az X-re vonatkozó komplementert vesszővel jelölve,

(1) $(\cup_{i\in I}X_i)'=\cap_{i\in I}X_i'$;
(2) $(\cap_{i\in I}X_i)'=\cup_{i\in I}X_i'$.

83. Fogalmazza meg a halmazműveletek és egy függvény kapcsolatáról tanult állításokat.

Legyen $f:X\to Y$ egy függvény, B, $B_i\subset Y$, ha $i\in I\neq\emptyset$. Ekkor

(1) $f^{-1}(\cup_i B_i)=\cup_i f^{-1}B_i$;
(2) $f^{-1}(\cap_i B_i)=\cap_i f^{-1}B_i$;
(3) $f^{-1}(Y\backslash B)=X\backslash f^{-1}(B)$.

84. Definiálja véges sok halmaz Descartes-szorzatát és ismertesse a kapcsolódó jelöléseket.

Ha az $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ elem n-eseket az $\{1,2,...,n\}$ halmaz, azaz $\mathbb{N}^+$-nak az $n\in\mathbb{N}^+$-nál nem nagyobb elemei által indexelt családokkal azonosítjuk, akkor az $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ Descartes-szorzatot mint az összes olyan x_i, $i\in\{1,2,\ldots, n\}$ családok halmazát definiálhatjuk, amelyekre $x_i\in X_i$, ha $i\in\{1,2,\ldots,n\}$.

85. Definiálja a kiválasztási függvény fogalmát.

Legyen X_i, $i \in I$ egy halmazcsalád. A halmazcsaládhoz tartozó kiválasztási függvénynek nevezzük azokat az $x: I \to \cup_{i\in I} X_i$ függvényeket, amelyekre $x_i \in X_i$ minden $i \in I$-re.

86. Definiálja a (nem feltétlenül binér) reláció fogalmát és a kapcsolódó jelöléseket.

Ha az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ elem n-eseket az $\{1,2,...,n\}$ halmaz, azaz $\mathbb{N}^+$-nak az $n \in \mathbb{N}^+$-nál nem nagyobb elemei által indexelt családokkal azonosítjuk, akkor az $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ Descartes-szorzatot mint az összes olyan x_i, $i \in \{1,2,\ldots, n\}$ családok halmazát definiálhatjuk, amelyekre $x_i \in X_i$, ha $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Ilyen szorzathalmazok részhalmazait n-változós relációknak nevezzük.

87. Definiálja tetszőleges halmazcsalád Descartes-szorzatát és ismertesse a kapcsolódó jelöléseket.

Az X_i, $i \in I$ halmazcsalád $\times_{i\in I} X_i$ Descartes-szorzata a halmazcsaládhoz tartozó összes kiválasztási függvénynek halmaza. Jelölése: $\times_i X_i$.

88. Definiálja a projekció fogalmát.

Ha $J \subset I$, akkor az $x \mapsto x_{|J}$ leképezést $\times_{i\in I} X_i$ -nek $\times_{j\in J} X_j$-be való projekciónak nevezzük.

89. Definiálja a kulcs fogalmát.

???

90. Definiálja a binér, unér és nullér művelet fogalmát és ismertesse a kapcsolódó jelöléseket.

Legyen X egy halmaz. Egy X-beli binér műveleten egy $*: X \times X \to X$ leképezést értünk. Ha $x, y \in X$ akkor $*(x,y)$ a művelet eredménye, x és y pedig az operandusai. Rendszerint a binér művelet jelét az operandusok közé írjuk: $x*y$. Egy X-beli unér művelet egy $*: X \to X$ leképezés. Mivel $X^{\emptyset} = \{\emptyset\}$, egy nullér művelet egy $*: \{\emptyset\} \to X$ leképezés, ami tulajdonképpen X egy elemének a kijelölését jelenti, operandusa nincs, csak eredménye.

91. Adjon meg egy binér és egy unér műveletet táblázattal.

∧	↑	↓
↑	↑	↓
↓	↓	↓

¬	↑	↓
	↓	↑

92. Ismertesse a fordított lengyel jelölést.

A kifejezésekben a műveleti jeleket mindig az operandusok elé írjuk.

93. Hogyan definiálunk műveleteket függvénytereken?

Legyen X tetszőleges halmaz, Y pedig egy halmaz a * binér művelettel. Ekkor az X-et Y-ba képező függvények között is értelmezünk „pontonként” egy binér műveletet (amit ugyanazzal a jellel szokás jelölni) az $(f*g)(x):=f(x)*g(x)$ minden $x\in X$-re, ha $f,g:X\to Y$ összefüggéssel. Hasonlóan definiálunk unér, illetve nullér műveleteket függvénytereken.

94. Adjon példát műveletekre függvények között.

Egy n-bites számítógépen rendszerint rendelkezésre állnak a logikai műveletek n-bites szavakon, azaz a $\{0,1,...,n-1\}$ halmazt a $\{\uparrow,\downarrow\}$ halmazba képező függvények halmazán.

95. Definiálja a művelettartó leképezés fogalmát.

Legyen * binér művelet az X, és legyen *' binér művelet az X' halmazon. Egy $\varphi:X\to X'$ leképezést művelettartónak nevetünk, ha $\varphi(x*y)=\varphi(x)*'\varphi(y)$ minden $x,y\in X$-re. Hasonlóan értelmezzük a művelettartást unér és nullér műveletre is.

96. Adjon példát művelettartó leképzésre.

Ha $a>1$, az $x|\!\to a^x$ leképzés művelettartó és kölcsönösen egyértelmű leképzése az összeadással tekintett valós számoknak a szorzással tekintett pozitív valós számokra.

Peano-axiómák

97. Fogalmazza meg a Peano-axiómákat.

Legyen $\mathbb{N}$ egy halmaz és $^+$ egy $\mathbb{N}$-en értelmezett függvény. Az alábbi feltételeket Peano-axiómáknak nevezzük:

(1) $0\in\mathbb{N}$ (nulla egy nullér művelet $\mathbb{N}$-en);
(2) ha $n\in\mathbb{N}$, akkor $n^+\in\mathbb{N}$ ($^+$ egy unér művelet $\mathbb{N}$-en);
(3) ha $n\in\mathbb{N}$, akkor $n^+\neq 0$ (0 nincs a $^+$ értékkészletében);
(4) ha $n,m\in\mathbb{N}$ és $n^+=m^+$, akkor $n=m$ ($^+$ leképezés kölcsönösen egyértelmű);
(5) ha $S\subset\mathbb{N}$, $0\in S$ és ha $n\in S$, akkor $n^+\in S$, akkor $S=\mathbb{N}$ (teljes indukció elve).

98. Mi a rákövetkező, a rákövetkezés, és a teljes indukció elve?

A Peano-axiómák 5. pontja a teljes indukció elve: legyen $\mathbb{N}$ egy halmaz és $^+$ egy $\mathbb{N}$-en értelmezett függvény; ha $S\subset\mathbb{N}$, $0\in S$ és ha $n\in S$, akkor $n^+\in S$, akkor $S=\mathbb{N}$. A 0 elemet nullának, a $^+$ unér műveletet rákövetkezésnek, az n^+ elemet az n rákövetkezőjének nevezzük.

99. Definiálja a számjegyeket.

Legyen $1:=0^+$, $2:=1^+$, $3:=2^+$, $4:=3^+$, $5:=4^+$, $6:=5^+$, $7:=6^+$, $8:=7^+$, $9:=8^+$ Ha további számjegyekre van szükségünk, akkor így folytatjuk $A:=9^+$,$B:=A^+$ stb.

100. Definiálja a sorozat fogalmát.

Az $\mathbb{N}$-en értelmezett függvények rekurzióval való definiálásáról van szó. Ezeket a függvényeket végtelen sorozatoknak nevezzük. Az $\mathbb{N}^+=\mathbb{N}\setminus\{0\}$ halmazon értelmezett függvényeket is szokás végtelen sorozatnak nevezni. Sorozatot megadhatunk úgy, hogy megadjuk a 0 helyen felvett értékét, és megadunk egy képzési szabályt, amelynek alapján megkapjuk a sorozat n helyen felvett értékéből az n^+ helyen felvett értéket. Erről szól a rekurziótétel.

101. Fogalmazza meg a rekurziótételt.

Legyen X egy halmaz, $a \in X$ és $f: X \to X$ egy függvény. Ha a Peano-axiómák teljesülnek, akkor egy és csak egy olyan $\mathbb{N}$-et X-be képező g függvény létezik, amelyre $g(0)=0$ és $g(n^+)=f(g(n))$ minden $n \in \mathbb{N}$-re.

102. Fogalmazza meg a természetes számok egyértelműségére vonatkozó tételt.

Tegyük fel, hogy $\mathbb{N}$ és $\mathbb{N}'$ is eleget tesz a Peano-axiómáknak. Ekkor létezik egy olyan φ kölcsönösen egyértelmű leképezése $\mathbb{N}$-nek $\mathbb{N}'$-re, amelyre $\varphi(0)=0$ és $\varphi(n^+)=(\varphi(n))^+$ minden $n \in \mathbb{N}$-re.

103. Fogalmazza meg a természetes számok létezésére vonatkozó tételt.

Van olyan $(\mathbb{N},(0,^+))$ pár, amely eleget tesz a Peano-axiómáinak.

104. Definiálja a karakterisztikus függvény fogalmát és ismertesse a kapcsolódó jelöléseket.

Legyen X egy halmaz, és ha $Y \subset X$, legyen $\chi_Y(x)=1$, ha $x \in Y$ és $\chi_Y(x)=0$, ha $x \in X \setminus Y$. A χ_Y függvényt az Y halmaz (X-en értelmezett) karakterisztikus függvényének nevezzük. Az $Y \to \chi_Y$ leképezés kölcsönösen egyértelmű leképezése $\rho(X)$-nek az X-en értelmezett karakterisztikus függvények $\{0,1\}^X$ halmazára. (Emiatt szokás $\rho(X)$-et 2^X-el is jelölni.)

Műveletek természetes számokkal

105. Definiálja a természetes számok összeadását.

A rekurziótétel alapján minden $m \in \mathbb{N}$-re létezik olyan $s_m: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, amelyre $s_m(0)=m$ és minden $n \in \mathbb{N}$-re $s_m(n^+)=(s_m(n))^+$. Az $s_m(n)$ számot m+n-el fogjuk jelölni és az m és az n összegének nevezzük.

106. Fogalmazza meg a természetes számok összeadásának alaptulajdonságait kimondó tételt.

Ha $k,m,n \in \mathbb{N}$, akkor

1. $(k+m)+n=k+(m+n)$ (asszociativitás);
2. $0+n=n+0=n$ (a 0 nullelem);
3. $m+n=n+m$ (kommutativitás);
4. ha $m+k=n+k$, akkor $m=n$ (egyszerűsítési szabály, vagy törlési szabály).

107. Definiálja természetes számok szorzását.

A rekurziótétel alapján minden $m \in \mathbb{N}$-re létezik olyan $p_m: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvény, amelyre $p_m(0)=0$ és minden $n \in \mathbb{N}$-re $p_m(n^+)=p_m(n)+m$. A $p_m(n)$ számot $m \cdot n$-el fogjuk jelölni, és az m és az n szorzatának nevezzük.

108. Fogalmazza meg a természetes számok szorzásának alaptulajdonságait kimondó tételt.

Ha $k,m,n \in \mathbb{N}$, akkor

1. $(k \cdot m) \cdot n=k \cdot (m \cdot n)$ (asszociativitás);
2. $0 \cdot n=n \cdot 0=0$;
3. $1 \cdot n=n \cdot 1=n$ (az 1 egységelem);

4. m·n=n·m (kommutativitás);
5. k·(m+n)=k·m+k·n (disztributivitás).

109. Definiálja a baloldali semleges elem, a jobboldali semleges elem és a semleges elem fogalmát.

Legyen * egy binér művelet a G halmazon. A G halmazt a * művelettel, (azaz, ha pontosak akarunk lenne, a (G,*) párt) szokás grupoidnak is nevezni. A G egy s elemét bal, illetve jobb oldali semleges elemnek nevezzük, ha s*g=g, illetve g*s=g minden $g \in G$-re. Ha s bal és jobb oldali semleges elem is, akkor semleges elemnek nevezzük.

110. Igaz-e, hogy legfeljebb egy baloldali semleges elem van?

Nem. A G-ben létezhet akárhány bal oldali semleges elem. Például ha $(g,h) \mapsto h$ műveletnél minden elem bal oldali semleges elem.

111. Igaz-e, hogy legfeljebb egy semleges elem van?

Igen. Ha van egy bal oldali s_b és egy jobb oldali s_j semleges elem, akkor $s_b = s_b * s_j = s_j$, így bármely bal oldali semleges elem megegyezik bármely jobb oldali semleges elemmel, azaz csak egy bal és jobb oldali semleges elem van.

112. Definiálja a félcsoport, a balinverz, a jobbinverz és az inverz fogalmát.

Ha a * binér művelet a G halmazon asszociatív, azaz $x,y,z \in X$ esetén (x*y)*z=x*(y*z), akkor a G-t (pontosabban a (G,*) párt) félcsoportnak nevezzük. Ha a G félcsoportban s semleges elem, és $g,g^* \in G$-re $g*g^*=s$, akkor azt mondjuk, hogy g a g^* balinverze, g^* pedig a g jobbinverze. Ha a g^* a g bal- és jobbinverze is, akkor azt mondjuk, hogy a g inverze. Ekkor nyilván g meg a g^* inverze.

113. Igaz-e, hogy egy egységelemes félcsoportban egy elemhez legfeljebb egy inverz elem létezik?

Igen. Speciálisan, ha g-nek van inverze, akkor az egyértelmű.

114. Igaz-e, hogy egy egységelemes multiplikatív félcsoportban ha h-nak és g-nek van inverze, akkor hg-nek is, és ha igen, mi?

Igen. Ha g-nek g^* az inverze, és h-nak h^* az inverze, akkor a g*h inverze $h^{*}*g^{*}$.

115. Definiálja a csoport és az Abel-csoport fogalmát.

Ha a * binér művelet a G halmazon, $g,h \in G$ és g*h=h*g, akkor azt mondjuk, hogy g és h felcserélhetőek. Ha G bármely két eleme felcserélhető, akkor a * műveletet kommutatívnak nevezzük. A kommutatív csoportokat Abel-csoportnak nevezzük. Ha X tetszőleges halmaz, akkor $(\rho(x),\triangle)$ Abel-csoport.

116. Igaz-e, hogy ha X tetszőleges halmaz, akkor $(\rho(x),\cap)$ egy egységelemes félcsoport?

Nem. $(\rho(x),\cap)$ kommutatív egységelemes félcsoport.

117. Igaz-e, hogy ha X tetszőleges halmaz, akkor $(\rho(x),\cup)$ egy csoport?

Nem. $(\rho(x),\cup)$ kommutatív egységelemes félcsoport.

118. Igaz-e, hogy ha X tetszőleges halmaz, akkor $(\rho(x),\backslash)$ egy félcsoport?

Nem. $(\rho(x),\backslash)$-ben általában nincs egységelem, a művelet nem asszociatív és nem is kommutatív.

119. Igaz-e, hogy ha X tetszőleges halmaz, akkor az X-beli binér relációk a kompozícióval egységelemes félcsoportot alkotnak?

Igaz. Ez általában nem kommutatív és nem is csoport, bár vannak invertálható elemei.

120. Igaz-e, hogy ha X tetszőleges halmaz, akkor az X-et X-re képező bijektív leképezések kompozícióval, mint művelettel csoportot alkotnak?

Igaz. Ha csak az összes injektív, illetve az összes szürjektív leképezéseket tekintjük, akkor is egységelemes félcsoportot kapunk. Az összes bijektív leképezések csoportot alkotnak.

121. Definiálja a szimmetrikus csoport fogalmát.

Az $\{1,2,...,n\}$ halmaz összes permutációinak csoportját S_n-nel jelöljük, és n-ed fokú szimmetrikus csoportnak nevezzük.

Természetes számok rendezése

122. Definiálja természetes számokra a $\leq$ relációt.

Ha $m,n\in\mathbb{N}$, akkor azt mondjuk, hogy $m\leq n$, ha van olyan k természetes szám, hogy $m+k=n$.

123. Fogalmazza meg a természetes számokra a $\leq$ relációt és a műveletek kapcsolatát leíró tételt.

Ha $m,n\in\mathbb{N}$, akkor azt mondjuk, hogy $m\leq n$, ha van olyan k természetes szám, hogy $m+k=n$ Legyen $k,m,n\in\mathbb{N}$. Ekkor

(1) n^+ közvetlenül követi n-et;
(2) $m\leq n$ akkor és csak akkor, ha $m+k\leq n+k$;
(3) $k\neq 0$ esetén $m\leq n$ akkor és csak akkor, ha $m\cdot k\leq n\cdot k$;
(4) $m<n$ akkor és csak akkor, ha $m+k<n+k$;
(5) $k\neq 0$ esetén $m<n$ akkor és csak akkor, ha $m\cdot k<n\cdot k$;
(6) ha $m\cdot k=n\cdot k$ és $k\neq 0$ makkor $m=n$ (egyszerűsítési szabály vagy törlési szabály $k\neq 0$-ra).

124. Definiálja a véges sorozatokat.

Ha $n\in\mathbb{N}$, akkor a $[0,n]\subset\mathbb{N}$ vagy $[1,n]\subset\mathbb{N}^+$ halmazon értelmezett függvényeket véges sorozatnak nevezzük. Az x véges sorozatot úgy is jelöljük, hogy $x_0,x_1,...,x_n$ vagy $x_i, i=0,1,2,...,n$.

125. Fogalmazza meg az általános rekurziótételt.

Legyen adott egy X halmaz és egy f függvény, amelynek értékkészlete X részhalmaza, értelmezési tartománya pedig az összes olyan függvények halmaza, amelyek értékkészlete X részhalmaza, értelmezési tartománya pedig $\mathbb{N}$ valamely kezdőszelete. Ekkor egyértelműen lézetik egy $g:\mathbb{N}\rightarrow X$ függvény, amelyre $g(a)=f(g|_{]\leftarrow,a[})$minden $a\in\mathbb{N}$-re.

126. Hogyan használható az általános rekurziótétel a Fibonacci-számok definiálására?

Legyen $X=\mathbb{N}$, és legyen az $n\mapsto n^-$ leképezése $\mathbb{N}^+$-nak $\mathbb{N}$-re az $n\mapsto n^+$ leképezés inverze, $f(\emptyset)=0, f(\{(0,k)\})=1$ bármely $k\in\mathbb{N}$-re, és ha $n>1$, $h:]\leftarrow,n[\to\mathbb{N}$ egy függvény, akkor legyen $f(h)=h(n^-)+h(n^{--})$. $(n=\min(\mathbb{N}\setminus \boldsymbol{D}(h)))$

127. Definiálja véges sok elem szorzatát félcsoportban és egységelemes félcsoportban.

Ha G egy félcsoport, $x:\mathbb{N}^+\to G$ egy sorozat, akkor az általános rekurziótételt alkalmazva definiálhatjuk a $\prod_{k=1}^{n} x_k$, $n\in\mathbb{N}$ szorzatokat úgy, hogy $\prod_{k=1}^{1} x_k=1$ és $\prod_{k=1}^{n+1} x_k=(\prod_{k=1}^{n} x_k)\cdot x_{(n+1)}$.
Ha G egységelemes félcsoport e egységelemmel, akkor $\prod_{k=0}^{0} x_k=e$.

128. Fogalmazza meg a hatványozás két tulajdonságát félcsoportban és egységelemes félcsoportban.

A sorozatok tulajdonságaiból következik, vagy indukcióval bizonyítható, hogy $g^{m+n}=g^m\cdot g^n$ és $(g^m)^n=g^{mn}$ minden $m,n\in\mathbb{N}^+$-ra, ha G egységelemes félcsoport, akkor minden $m,n\in\mathbb{N}$-re.

129. Fogalmazza meg a hatványozásnak azt a tulajdonságát, amely csak felcserélhető elemekre érvényes.

Ha g,h a G félcsoport felcserélhető elemei, akkor indukcióval $(gh)^n=g^nh^n$ minden $n\in\mathbb{N}^+$-ra, ha G egységelemes félcsoport, akkor minden $n\in\mathbb{N}$-re.

130. Hogyan értelmeztük, a $\sum_{(a\in A)} x_a$ jelölést?

Ha G kommutatív, akkor additív írásmódot is használhatunk, ilyenkor a szorzat helyett $\sum_{k=1}^{n} x_k$ összeget írunk. Ha G kommutatív félcsoport 0 nullelemmel, akkor $\sum_{k=1}^{0} x_k=0$. Ha $x_k=g$ minden n-re, akkor $\sum_{k=1}^{n} x_k$ helyett ng-t írunk, n az együttható. Gyakran $\sum_{k=1}^{n} x_k$ helyett azt írjuk, hogy $x_1+x_2+...+x_n$. Ha $x:A\to G$ egy tetszőleges függvény, és van olyan $\varphi:\{k\in\mathbb{N}:1\leq k\leq n\}\to A$ kölcsönösen egyértelmű leképezés, amely A-ra képez, akkor a kommutativitást és asszociativitást felhasználva indukcióval belátható, hogy minden ilyen leképezésre $\sum_{k=1}^{n} x_{(\varphi(k))}$ ugyanaz. (Ez az általános kommutativitás tétele.) Ezt a közös értéket $\sum_{(a\in A)} x_a$ -val is jelöljük.

131. Definiálja a logikai függvény fogalmát.

Logikai függvény (vagy Boole-függvény) alatt az $\{\uparrow,\downarrow\}^n$ halmazt az $\{\uparrow,\downarrow\}^m$ halmazba képező függvényt értünk, ahol $m,n\in\mathbb{N}$.

132. Fogalmazza meg a logikai függvények normálalakjára vonatkozó tételt.

Minden $f:\{\uparrow,\downarrow\}^n\to\{\uparrow,\downarrow\}$ logikai függvény felírható $f(X_1,X_2,...,X_n)=A_1\vee A_2\vee...\vee A_m$ alakban, ahol $A_1,A_2,...,A_m$ különböző logikai formulák, de mindegyik $B_1\wedge B_2\wedge...\wedge B_{n_k}$ alakú, ahol B_j vagy X_{i_j} vagy $\neg X_{i_j}$ és $1\leq i_1<i_2<...<i_{n_k}\leq n$.

133. Definiálja a logikai függvény diszjunktív illetve konjunktív normál alakját.

Minden $f:\{\uparrow,\downarrow\}^n \to \{\uparrow,\downarrow\}$ logikai függvény felírható $f(X_1,X_2,...,X_n)=A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_m$ alakban, ahol $A_1,A_2,...,A_m$ különböző logikai formulák, de mindegyik $B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_{n_k}$ alakú, ahol B_j vagy X_{i_j} vagy $\neg X_{i_j}$ és $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_{n_k} \le n$.

134. Definiálja a logikai függvény teljes diszjunktív illetve teljes konjunktív normál alakját.

Ebben a háromban sem vagyok biztos...

135. Ismertesse a természetes számok bináris ábrázolását.

A mai számítógépek mindegyike alapvetően kettes számrendszerben dolgozik. A természetes számokat (előjel nélküli egész) a számítógép kettes számrendszerben ábrázolja.

136. Fogalmazza meg a maradékos osztás tételét.

Legyen $n>0$ természetes szám. Minden m természetes szám egyértelműen felírható $m=qn+r$ alakban, ahol $q,r \in \mathbb{N}$ és $r<n$.

137. Definiálja a hányadost és a maradékot természetes számok osztásánál, a páros és páratlan természetes számokat.

Legyen $n>0$ természetes szám. Minden m természetes szám egyértelműen felírható $m=qn+r$ alakban, ahol $q,r \in \mathbb{N}$ és $r<n$. E tétel szerint egyértelműen létező q számot hányadosnak, r számot pedig maradéknak nevezzük az m szám n-el való maradékos osztásánál. Ha az m természetes szám 2-vel való maradékos osztásánál a maradék 0, akkor m-et párosnak, egyébként páratlannak nevezzük.

138. Fogalmazza meg a számrendszerekre vonatkozó tételt.

Legyen $q>1$ természetes szám. Minden $m>0$ természetes számhoz egy és csak egy olyan n természetes szám és $a_0,a_1,...,a_n \in [0,g[\subset \mathbb{N}$ sorozat létezik, amelyre $a_n \neq 0$ és $m= \sum_{i=0}^{0} a_i \cdot q^i$.

Egész számok

139. Mikor mondjuk, hogy egy binér művelet kompatibilis egy osztályzással? Adjon ekvivalens megfogalmazást, és definiálja a műveletet az osztályok között.

Legyen * egy binér művelet X-en, és legyen adott X egy osztályozása, illetve a megfelelő ~ ekvivalencia-reláció. Azt mondjuk, hogy a * művelet kompatibilis az osztályozással, illetve az ekvivalenciarelációval, ha x~x' és y~y' esetén x*y~x'*y'. Az ekvivalenciareláció tulajdonságai miatt elég azt megkövetelni, hogy x*y~x'*y és x*y~x*y' teljesüljön. Ha a művelet kompatibilis az osztályozással, akkor az ekvivalenciaosztályok terén, $X^{\sim}$-on bevezethetünk egy $*^{\sim}$ műveletet a $x^{\sim} *^{\sim} y^{\sim} = (x*y)^{\sim}$ definícióval.

140. Mikor mondjuk, hogy egy binér reláció kompatibilis egy osztályzással? Adjon ekvivalens megfogalmazást, és definiálja a relációt az osztályok között.

Legyen R egy X-beli binér reláció, és legyen adott X egy osztályozása, illetve a megfelelő ~ ekvivalencia-reláció. Azt mondjuk, hogy az R reláció kompatibilis az osztályozással, illetve az ekvivalenciarelációval, ha x~x' és y~y' esetén xRy-ból következik, hogy x'Ry'. Az ekvivalenciareláció tulajdonságai miatt elég azt megkövetelni, hogy xRy-ból következzen, hogy x'Ry és xRy' teljesül. Ha az R reláció kompatibilis az osztályozással, akkor az ekvivalenciaosztályok terén, $X^{\sim}$-on bevezethetünk egy $R^{\sim}$ relációt a $x^{\sim}R^{\sim}y^{\sim}$ ha xRy definícióval.

XXX. Definiálja az egész számokat a műveletekkel és a rendezéssel és fogalmazza meg az egész számok tulajdonságait leíró tételt.

Tekintsük $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-en az $(m,n)\sim(m',n')$, ha $m+n'=m'+n$ relációt az $(m,n)+(m'+n')=(m+m',n+n')$ összeadást és az $(m,n)\cdot(m',n')=(m\cdot m'+n\cdot n',m\cdot n'+m'\cdot n)$ szorzást, valamint az$(m,n)\leq(m',n')$, ha $m+n'\leq m'+n$ relációt. A ~ reláció ekvivalenciareláció. Az ekvivalenciaosztályok halmazát $\mathbb{Z}$-vel fogjuk jelölni, és elemeit egész számoknak nevezzük. Az összeadás, a szorzás és a $\leq$ reláció kompatibilis az ekvivalenciával, így az egész számok között értelmezve van az összeadás, a szorzás és a $\leq$ reláció, amely rendezés, továbbá

(1) $\mathbb{Z}$ az összeadásra nézve Abel-csoport;
(2) $\mathbb{Z}$ a szorzással kommutatív egységelemes félcsoport;
(3) ha $x,y\in\mathbb{Z}$ és egyik sem nulla, akkor szorzatuk sem nulla;
(4) ha $x,y,z\in\mathbb{Z}$, akkor $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ (disztributivitás);
(5) ha $x,y,z\in\mathbb{Z}$ és $x\leq y$, akkor $x+z\leq y+z$ (az összeadás monoton);
(6) ha $x,y\in\mathbb{Z}$ és $x,y\geq 0$, akkor $x\cdot y\geq 0$ (a szorzás monoton);

141. Definiálja az egész számokat az összeadással és fogalmazza meg az egész számok összeadásának tulajdonságait leíró tételt.

Tekintsük $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-en az $(m,n)\sim(m',n')$, ha $m+n'=m'+n$ relációt az $(m,n)+(m'+n')=(m+m',n+n')$ összeadást. A ~ reláció ekvivalenciareláció. Az ekvivalenciaosztályok halmazát $\mathbb{Z}$-vel fogjuk jelölni, és elemeit egész számoknak nevezzük. Az összeadás kompatibilis az ekvivalenciával, így az egész számok között értelmezve van az összeadás, továbbá

1. $\mathbb{Z}$ az összeadásra nézve Abel-csoport;
2. ha $x,y,z\in\mathbb{Z}$, akkor $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ (disztributivitás);
3. ha $x,y,z\in\mathbb{Z}$ és $x\leq y$, akkor $x+z\leq y+z$ (az összeadás monoton).

142. Definiálja az egész számok szorzását, és fogalmazza meg az egész számok szorzásának tulajdonságait leíró tételt.

Tekintsük $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-en az $(m,n)\sim(m',n')$, ha $m+n'=m'+n$ relációt és az $(m,n)\cdot(m',n')=(m\cdot m'+n\cdot n',m\cdot n'+m'\cdot n)$ szorzást. A ~ reláció ekvivalenciareláció. Az ekvivalenciaosztályok halmazát $\mathbb{Z}$-vel fogjuk jelölni, és elemeit egész számoknak nevezzük. A szorzás kompatibilis az ekvivalenciával, így az egész számok között értelmezve van a szorzás, továbbá

1. $\mathbb{Z}$ a szorzással kommutatív egységelemes félcsoport;
2. ha $x,y\in\mathbb{Z}$ és egyik sem nulla, akkor szorzatuk sem nulla;
3. ha $x,y,z\in\mathbb{Z}$, akkor $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ (disztributivitás);
4. ha $x,y\in\mathbb{Z}$ és $x,y\geq 0$, akkor $x\cdot y\geq 0$ (a szorzás monoton).

143. Definiálja az egész számok rendezését, és fogalmazza meg az egész számok rendezésének tulajdonságait leíró tételt.

Tekintsük $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-en az $(m,n)\sim(m',n')$, ha $m+n'=m'+n$ relációt az$(m,n)\leq(m',n')$, ha $m+n'\leq m'+n$ relációt. A ~ reláció ekvivalenciareláció. Az ekvivalenciaosztályok halmazát $\mathbb{Z}$-vel fogjuk jelölni, és elemeit egész számoknak nevezzük. A $\leq$ reláció kompatibilis az ekvivalenciával, így az egész számok között értelmezve van a $\leq$ reláció, amely rendezés, továbbá

1. ha $x,y,z\in\mathbb{Z}$ és $x\leq y$, akkor $x+z\leq y+z$ (az összeadás monoton);
2. ha $x,y\in\mathbb{Z}$ és $x,y\geq 0$, akkor $x\cdot y\geq 0$ (a szorzás monoton);

144. Adja meg $\mathbb{N}$-nek $\mathbb{Z}$-be való beágyazását és fogalmazza meg a beágyazás tulajdonságát.

A φ:n|→(n,0)~ leképezése $\mathbb{N}$-nek $\mathbb{Z}$-be kölcsönösen egyértelmű, összeadás- és szorzástartó, monoton növekedő, valamint $\varphi(n)=n\varphi(1)$ minden $n\in\mathbb{N}$-re. Így $\varphi(\mathbb{N})$-et azonosíthatjuk $\mathbb{N}$-el. Ezzel az azonosítással $\mathbb{N}\cup(-\mathbb{N})=\mathbb{Z}$ és $\mathbb{N}\cap(-\mathbb{N})=\{\emptyset\}$.

145. Ismertesse az egész számok többletes ábrázolását.

146. Definiálja egy csoportban az egész kitevős hatványozást és fogalmazza meg két tulajdonságát.

Ha G egy csoport, $g\in G$, akkor az $n\mapsto g^n$ leképezést a $g^{-n}=(g^{-1})^n$, ha $n\in\mathbb{N}^+$ definícióval kiterjeszthetjük egy $\mathbb{Z}$-n értelmezett leképezéssé. Erre a leképezésre $g^{m+n}=g^mg^n$ és $(g^m)^n=g^{mn}$ minden $m,n\in\mathbb{Z}$-re.

147. Definiálja egy csoportban az egész kitevős hatványozást és fogalmazza meg egy olyan tulajdonságát, amely csak felcserélhető elemekre érvényes.

Ha G egy csoport, $g\in G$, akkor az $n\mapsto g^n$ leképezést a $g^{-n}=(g^{-1})^n$, ha $n\in\mathbb{N}^+$ definícióval kiterjeszthetjük egy $\mathbb{Z}$-n értelmezett leképezéssé. Ha $g,h\in G$ felcserélhető elemek, akkor $(gh)^n=g^nh^n$ minden $n\in\mathbb{Z}$-re.

148. Definiálja a nullgyűrű és a zérógyűrű fogalmát.

Egy R halmazt egy $(+,\cdot)$ binér műveletekből álló párral gyűrűnek nevezünk, ha az összeadással Abel-csoport (a nullelemet 0 fogja jelölni), a szorzással félcsoport, és teljesül mindkét oldali disztributivitás. A nullgyűrű csak egy elemet tartalmaz, ez pedig a 0. A zérógyűrű olyan Abel-csoport, melyben bármely két elem szorzatát nullának értelmezzük.

149. Definiálja a bal és jobb oldali nullosztó és nullosztópár fogalmát.

Ha x,y egy R gyűrű nullától különböző elemei, és xy=0, akkor azt mondjuk, hogy x és y egy nullosztópár, x bal oldali nullosztó, y pedig jobb oldali nullosztó.

150. Fogalmazza meg az általános disztributivitás tételét.

Egy R gyűrűben

(1) ha $m,n\in\mathbb{N}$, valamint $a_1,a_2,\dots,a_m$ és $b_1,b_2,\dots,b_n$ a gyűrű tetszőleges elemei, akkor
$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_i b_j\right) \quad ;$$

(2) ha $m\in\mathbb{N}^+$, $n_1,\dots n_m\in\mathbb{N}$, valamint $a_{i,j_i}\in R$, ha $1\le i\le m$, $1\le j_i\le n_i$, akkor
$$\prod_{i=0}^{m}\left(\sum_{j_i=1}^{n_i} a_{(i,j_i)}\right)=\sum_{j_i=1}^{n_1}\dots\sum_{j_m=1}^{n_m}\prod_{i=1}^{m} a_{(i,j_i)} \quad ;$$

151. Definiálja az integritási tartomány fogalmát.

Kommutatív nullosztómentes gyűrűt integritási tartománynak nevezünk.

152. Definiálja a rendezett integritási tartomány fogalmát.

Az R-et rendezett integritási tartománynak nevezzük, ha rendezett halmaz, integritási tartomány, és

(1) ha $x,y,z \in R$ és $x \leq y$, akkor $x+z \leq y+z$ (az összeadás monoton);
(2) ha $x,y \in R$ és $x,y \geq 0$, akkor $x \cdot y \geq 0$ (a szorzás monoton).

153. Fogalmazzon meg szükséges és elégséges feltételt arra vonatkozóan, hogy egy integritási tartomány rendezett integritási tartomány legyen.

Egy rendezett halmaz, amely integritási tartomány, akkor és csak akkor rendezett integritási tartomány, ha az alábbi feltételek fennállnak:

1. ha $x,y,z \in R$ és $x<y$, akkor $x+z<y+z$ (az összeadás szigorúan monoton);
2. ha $x,y \in R$ és $x,y>0$, akkor $x \cdot y>0$ (a szorzás szigorúan monoton).

154. Fogalmazza meg a rendezett integritási tartományban az egyenlőtlenségekkel való számolás szabályait leíró tételt.

Legyen R rendezett integritási tartomány. Ekkor

(1) ha $x>0$, akkor $-x<0$, és ha $x<0$, akkor $-x>0$;
(2) ha $x<y$ és $z>0$, akkor $xz<yz$;
(3) ha $x<y$ és $z<0$, akkor $xz>yz$;
(4) ha $x \neq 0$, akkor $x^2>0$; speciálisan, ha van egységelem, akkor az pozitív;
(5) ha 1 az egységelem, $0<x<y$, és x-nek is, y-nak is van multiplikatív inverze, akkor $0<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$.

Racionális számok

155. Definiálja a racionális számok halmazát a műveletekkel és a rendezéssel, és fogalmazza meg a racionális számok tulajdonságait leíró tételt.

Tekintsük $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$-n az $(m,n)\sim(m',n')$, ha $mn'=nm'$ relációt, az $(m,n)+(m',n')=(mn'+nm',nn')$ összeadást és az $(m,n)\cdot(m',n')=(m\cdot m',n\cdot n')$ szorzást, valamint az $(m,n)\leq(m',n')$, ha $(m'n-n'm)nn'\geq 0$ relációt. A $\sim$ reláció ekvivalenciareláció. Az ekvivalenciaosztályok halmazát $\mathbb{Q}$-val fogjuk jelölni, és elemeit racionális számoknak nevezzük. Az összeadás, a szorzás és a $\leq$ reláció kompatibilis az ekvivalenciával, így a racionális számok között értelmezve van az összeadás, a szorzás és a $\leq$ reláció, amely rendezés, továbbá

(1) $\mathbb{Q}$ az összeadással és a szorzással egységelemes integritási tartomány;
(2) $\mathbb{Q}$ nem nulla elemei a szorzással Abel-csoportot alkotnak;
(3) ha $x,y,z \in \mathbb{Q}$ és $x \leq y$, akkor $x+z \leq y+z$ (az összeadás monoton);
(4) ha $x,y \in \mathbb{Q}$ és $x,y \geq 0$, akkor $x \cdot y \geq 0$ (a szorzás monoton.)

156. Adja meg $\mathbb{Z}$-nek $\mathbb{Q}$-ba való beágyazását és fogalmazza meg a beágyazás tulajdonságait.

A $\varphi: n \mapsto (n,1)^{\sim}$ leképezése $\mathbb{Z}$-nek $\mathbb{Q}$-ba kölcsönösen egyértelmű, összeadás- és szorzástartó, monoton növekedő, valamint $\varphi(n)=n\varphi(1)$ minden $n \in \mathbb{Z}$-re. Így $\varphi(\mathbb{Z})$-t azonosíthatjuk $\mathbb{Z}$-el. A $\mathbb{Q}$ minden eleme felírható $\frac{m}{n}$ alakban, ahol $m,n \in \mathbb{Z}$ és $n \neq 0$.

157. Definiálja a test és a ferdetest fogalmát és adjon három példát testre.

Egy F gyűrűt ferdetestnek nevezünk, ha a nullelemet 0-val jelölve F\{0} a szorzással csoport. Ha a szorzás kommutatív, akkor a ferdetestet testnek nevezzük. Példák testre: $\mathbb{Q}$, valós számok, komplex számok.

158. Definiálja a rendezett test fogalmát és adjon példát olyan testre, amely nem tehető rendezett testté.

Egy testet rendezett testnek nevezünk, ha test és rendezett integritási tartomány. Például a kételemű testen nincs olyan rendezés, amellyel rendezett test, mert rendezett testben 1>0 és -1<0, de a kételemű testben -1=1.

159. Adja meg $\mathbb{Q}$-nak egy rendezett testbe való beágyazását és fogalmazza meg a beágyazás tulajdonságait.

Legyen F rendezett test e egységelemmel. Ekkor egyértelműen létezik egy kölcsönösen egyértelmű és összeadástartó $\varphi:\mathbb{Q}\to F$ leképezés. Ez a leképezés monoton növekedő és szorzástartó is, és $\varphi(\frac{m}{n})=\frac{ms}{ns}$, ha $n,m\in\mathbb{Z}$ és $n\neq 0$. Így $\mathbb{Q}$ azonosítható $\varphi(\mathbb{Q})$-val.

Valós számok

160. Fogalmazza meg az Arkhimédeszi tulajdonságot.

Egy F rendezett testet arkhimédészi tulajdonságúnak nevezünk, ha $x,y\in F$, $x>0$ esetén van olyan $n\in\mathbb{N}$, amelyre $nx\geq y$.

161. Mi a kapcsolata az Arkhimédeszi tulajdonságnak a felsőhatár tulajdonsággal?

Egy felső határ tulajdonságú test mindig arkhimédeszi tulajdonságú is.

162. Fogalmazza meg a racionális számok felső határ tulajdonságára és az Arkhimédeszi tulajdonságára vonatkozó tételt.

A racionális számok rendezett teste arkhimédészi tulajdonságú, de nem felső határ tulajdonságú.

163. Fogalmazza meg a valós számok egyértelműségét leíró tételt.

Létezik felső határ tulajdonságú test. Egy felső határ tulajdonságú testet valós számoknak nevezünk. Legyen $\mathbb{R}'$ és $\mathbb{R}''$ két felsőhatár tulajdonságú test. Ekkor létezik egy φ kölcsönösen egyértelmű leképezése $\mathbb{R}'$-nak $\mathbb{R}''$-re, amely monoton növekedő, összeadás és szorzástartó.

164. Definiálja a valós szám abszolút értékét és a sgn függvényt.

Ha x valós szám, legyen $|x|=x$, ha $x\geq 0$, és legyen $|x|=-x$, ha $x<0$. Legyen $sgn(x)=0$, ha $x=0$ és $sgn(x)=\frac{x}{|x|}$ egyébként; sgn az előjelfüggvény.

165. Definiálja valós szám valós számmal való osztásánál a maradékot alsó és valós szám törtrészét.

166. Definiálja a bővített valós számokat.

A bővített valós számok halmaza: $\overline{\mathbb{R}}:=\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$.

167. Ismertesse a valós számok fixpontos ábrázolását.

Kettes számrendszert használva rögzítünk egy N egész számot, a törtrész hosszát. Az $n/2^N$, $n\in\mathbb{Z}$ alakú számok pontosan ábrázolhatók, ha n-et tároljuk. Egy tetszőleges x valós szám helyett a hozzá legközelebb eső pontosan ábrázolható számot tároljuk; ha két ilyen szám van, akkor azt, amelyben n páros (szabályos kerekítés), vagy egyéb kerekítést alkalmazunk.

168. Ismertesse a valós számok kerekítési módjait.

Kerekítés szükségessége esetén nem tudjuk pontosan tárolni az adott valós számot, ilyenkor a

1. Szabályos kerekítés: azt a legközelebb álló számot vesszük figyelembe, amelyik páros.
2. lefelé kerekítés esetén a tárolandó számnál nem nagyobb pontosan ábrázolható számok közül válasszuk ki az tárolandó számhoz a legközelebbit.
3. felfelé kerekítés esetén a tárolandó számnál nem kisebb pontosan ábrázolható számok közül választjuk ki a legközelebbit.
4. Csonkítás esetén az $|x|$-nél kisebb abszolút értékű pontosan ábrázolható számok közül választjuk ki az x-hez legközelebbit.

169. Ismertesse a valós számok lebegőpontos ábrázolását.

A lebegőpontosan ábrázolható számok $n\cdot 2^{k-N}$ alakúak, ahol $n,k\in\mathbb{Z}$ és $1-2^K<k<2^K$, $-2^{N+1}<n<2^{N+1}$. A K és az N konstansok értékeinek az IEEE 754 szabványban leírtaknak kell megfelelni.

Pontosság	Bájtok száma	K+1	N
egyszeres	4	8	23
kétszeres	8	11	52
Kiterjesztett kétszeres	≥10	≥15	≥63
négyszeres	16	15	112

170. Fogalmazza meg a valós számok létezését leíró tételt.

Létezik felsőhatár tulajdonságú test.

171. Fogalmazza meg a gyökvonásra vonatkozó tételt.

Minden $x\geq 0$ valós számhoz és $n\in\mathbb{N}^+$ természetes számhoz pontosan egy olyan $y\geq 0$ valós szám található, amelyre $y^n=x$. Az y számot az x n-edik gyökének nevezzük és $\sqrt[n]{x}$ -el jelöljük (n=2 esetén $\sqrt{x}$ -el is) vagy $x^{1/n}$-el jelöljük.

172. Fogalmazza meg a szorzat gyökére vonatkozó állítást.

Ha a és b nemnegatív valós számok és $n\in\mathbb{N}^+$, akkor $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

Komplex számok

173. Definiálja a komplex számok halmazát a műveletekkel.

A komplex számok halmaza $\mathbb{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, a valós számpárok halmaza az $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$ összeadással és az $(x,y)\cdot(x',y')=(xx'-y'y,y'x+yx')$ szorzással mint műveletekkel. A $\mathbb{C}$ test a fenti műveletekkel: a nullelem a (0,0) pár, az (x,y) pár additív inverze a (-x,-y) pár, egységelem az (1,0) pár, és a nullelemtől külöböző (x,y) pár multiplikatív inverze az $\left(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ pár.

174. Adja meg $\mathbb{R}$ beágyazását $\mathbb{C}$-be.

Ha $x,x'\in\mathbb{R}$, akkor $(x,0)+(x',0)=x+x',0),(x,0)\cdot(x',0)=(xx',0)$, így az $x|\rightarrow(x,0)$ leképezés kölcsönösen egyértelmű, összeadás- és szorzástartó leképezése $\mathbb{R}$-nek $\mathbb{C}$-be, ezért az összes (x,0), $x\in\mathbb{R}$ alakú komplex számok halmazát azonosíthatjuk $\mathbb{R}$-el.

175. Definiálja i-t, komplex szám valós és képzetes részét, konjugáltját és a képzetes számok fogalmát.

Jelölje i a (0,1) komplex számot. Az $i^2=-1$, az i segítségével az (x,y) komplex számot x+iy alakban írhatjuk, és ez a felírás természetesen egyértelmű. Ezt a szám algebrai alakjának nevezzük. Ha $z=x+iy\in\mathbb{C}$, ahol $x,y\in\mathbb{R}$, akkor x-et a z valós részének, az y-t pedig a z képzetes részének nevettük. A z konjugáltja a $\bar{z}=x-iy$ komplex szám. Egy komplex szám pontosan akkor valós, ha megegyezik a konjugáltjával. Ha egy komplex szám valós része nulla, akkor képzetesnek nevezzük.

176. Fogalmazza meg a komplex konjugálás tulajdonságait.

Legyen $z=x+iy\in\mathbb{C}$ és $x,y\in\mathbb{R}$. A z konjugáltja a $\bar{z}=x-iy$ komplex szám. Egy komplex szám pontosan akkor valós, ha megegyezik a konjugáltjával. Ha egy komplex szám valós része nulla, akkor képzetesnek nevezzük. Következnek a $\bar{\bar{z}}=z$, $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$, $\overline{zw}=\bar{z}\,\bar{w}$, $z+\bar{z}=2\Re(z)$, $z-\bar{z}=2i\Im(z)$ összefüggések, ahol $z,w\in\mathbb{C}$.

177. Definiálja komplex szám abszolút értékét. Milyen tételt használt?

Legyen az $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ komplex szám abszolút értéke $|(x,y)|=\sqrt{x^2+y^2}$. Felhasznált tétel: ha $x\in\mathbb{R}$, $x\geq0$, $n\in\mathbb{N}^+$, akkor egy és csak egy olyan y nem negatív valós szám létezik, amelyre $y^n=x$. Az y számot az x szám n-edik gyökének nevezzük, és $\sqrt[n]{x}$ -szel jelöljük.

178. Fogalmazza meg komplex számok abszolút értékének tulajdonságait.

Ha $z,w\in\mathbb{C}$, akkor $z\bar{z}=|z|^2$, $|0|=0$, és $z\neq0$ esetén $|z|>0$, $|\bar{z}|=|z|$, $|zw|=|z||w|$, teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek, illetve $|\Re(z)|\leq|z|$, $|\Im(z)|\leq|z|$ és $|z|\leq|\Re(z)|+|\Im(z)|$.

179. Definiálja komplex számokra a sgn függvényt és fogalmazza meg tulajdonságait.

Legyen $\mathrm{sgn}(0)=0$, és legyen $\mathrm{sgn}(z)=\frac{z}{|z|}$, ha $0\neq z\in\mathbb{C}$. Nyilván $\mathrm{sgn}(\bar{z})=\overline{\mathrm{sgn}(z)}$ és $|\mathrm{sgn}(z)|=1$, ha $z\neq0$.

180. Definiálja komplex számok trigonometrikus alakját és argumentumát.

Ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$, akkor van olyan t valós szám, amelyre sgn(z)=cos(t)+isin(t). Ha ez az összefüggés fennáll t-re, akkor a $t+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ számokra is, és csak ezekre. Ekkor z=|z|(cos(t)+isin(t)), ez a komplex szám trigonometrikus alakja. Ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$, akkor legyen a z argumentuma, arg(z) az az egyetlen t valós szám, amelyre $-\pi < t \leq \pi$ és sgn(z)=cos(t)+isin(t).

181. Írja fel két komplex szám szorzatát és hányadosát trigonometrikus alakjuk segítségével.

Legyen $z,w \in \mathbb{C}$, z=|z|(cos(t)+isin(t)) és w=|w|(cos(s)+isin(s)) ahol $t,s \in \mathbb{R}$. Ekkor zw trigonometrikus alakja zw=|zw|(cos(t+s)+isin(t+s)). Ha $w \neq 0$, akkor $\frac{1}{w}=\frac{\overline{w}}{|w^2|}$, ebből $\frac{z}{w}=\frac{|z|}{|w|}(\cos(t-s)+i\sin(t-s))$.

182. Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $w \in \mathbb{C}$, írja fel a $z^n=w$ egyenlet összes megoldását.

Indukcióval $|w|=|z|^n$. Ebből w=0 esetén z=0. Egyébként, ha t=arg(w), akkor a $z_k=\sqrt[n]{|(w)|}(\cos(\frac{t+2k\pi}{n})+i\sin(\frac{t+2k\pi}{n})), k=0,1,\dots n-1$ különböző komplex számok, és csak ezek azok, amelyek n-edik hatványa w.

183. Írja fel az n-edik komplex egységgyököket. Mit értünk primitív n-edik egységgyök alatt?

Ha w=1, akkor az $\epsilon^n=1$ feltételnek az $\epsilon_k=\cos(\frac{2k\pi}{n})+i\sin(\frac{2k\pi}{n}), k=0,1,\dots,n-1$ komplex számok tesznek eleget. Ezeket n-edik komplex egységgyököknek nevezzük. Bizonyos n-edik egységgyökök hatványaiként az összes többi előáll (például $\epsilon_k=\epsilon_1^k, k=0,1,\dots,k-1$), ezeket n-edik primitív egységgyököknek nevezzük.

184. Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $w \in \mathbb{C}$, írja fel a $z^n=w$ egyenlet összes megoldását az n-edig egységgyök segítségével.

Ezek $z\epsilon_0, z\epsilon_1, \dots, z\epsilon_{n-1}$.

185. Fogalmazza meg az algebra alaptételét.

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, valamint $c_0, c_1, \dots, c_n$ komplex számok, $c_n \neq 0$, akkor van olyan z komplex szám, amelyre $\sum_{k=0}^{n} c_k z^k=0$. (Másként fogalmazva, minden legalább elsőfokú komplex együtthatós algebrai egyenletnek van komplex gyöke.)

186. Definiálja a kvaterniók halmazát a műveletekkel.

A kvateriók halmaza $H=\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, a komplex számpárok halmaza, a (z,w)+(z',w')=(z+z',w+w') összeadással és a $(z,w)\cdot(z',w')=(zz'-\overline{w'}w, w'z+w\overline{z'})$ szorzással mint műveletekkel.

187. Milyen algebrai struktúrát alkotnak a kvaterniók?

Ferdetestet.

188. Adja meg a komplex számok beágyazását kvaterniókba.

Ha $z,z'\in\mathbb{C}$, akkor $(z,0)+(z',0)=(z+z',0),(z,0)\cdot(z',0)=(zz',0)$, így a $z\mapsto(z,0)$ leképezés kölcsönösen egyértelmű, összeadás- és szorzástartó laképezése $\mathbb{C}$-nek H-ba, így a $(z,0),\in z\mathbb{C}$ alakú kvateriók halmazát azonosítjuk $\mathbb{C}$-vel, azaz úgy tekintjük, hogy $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}\subset H$.

189. Definiálja j és k kvaterniókat. Hogyan írhatunk fel egy kvaterniót i, j és k segítségével?

Jelölje j a (0,1) kvaterniót. Ekkor $j^2=-1$, a j segítségével a (z,w) kvaterniót z+wj alakba írhatjuk, és ez a felírás egyértelmű. Ha k a (0,i) kvaterniót jelöli, akkor a (z,w) kvaterniót felírhatjuk a+bi+cj+dk alakban, ahol $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ és ez a felírás egyértelmű.

190. Igaz-e, hogy bármley kvaternió bármely valós számmal felcserélhető?

Igen, egy valós szám bármley kvaternióval felcserélhető.

191. Igaz-e, hogy bármely kvaternió bármely komplex számmal felcserélhető?

Nem, egy komplex szám nem cserélhető fel bármely kvaternióval. Például ha $z\in\mathbb{C}$, akkor jz=zj.

192. Adja meg a i, j, k kvaterniók „szorzótábláját”.

i,j=k, ji=-k, jk=i, kj=-i, ki=j, ik=-j.

193. Definiálja kvaternió valós és képzetes részét és konjugáltját.

Ha p=a+bi+cj+dk, ahol $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, akkor az a valós számot a p valós részének, a bi+cj+dk kvaterniót pedig a p képzetes részének nevezzük. A p konjugáltja a $\overline{p}$=a-bi-cj-dk kvaternió.

194. Fogalmazza meg a kvaterniók konjugáltjára vonatkozó állításokat.

Egy kvaternió pontosan akkor valós, ha megegyezik a konjugáljával. Ha egy kvaternió valós része nulla, akkor tisztán képzetesnek nevezzük. A definíció alapján következnek a $\overline{\overline{p}}=p$, $\overline{p+q}=\overline{p}+\overline{q}$, $\overline{pq}=\overline{p}\,\overline{q}$, $p+\overline{p}=2\Re(p)$, $p-\overline{p}=2\Im(p)$ összefüggések, ahol $p,q\in H$.

195. Definiálja a belső és a külső szorzást a kvaterniók segítségével.

A $(p,p')\mapsto\langle p,p'\rangle$ leképezést belső szorzásnak nevezzük, ahol p=xi+yj+zk és p'=x'i+y'j+z'k tisztán képzetes kvanteriók szorzatának valós része $-\langle p,p'\rangle$, ahol $\langle p,p'\rangle=xx'+yy'+zz'$, képzetes része pedig $p\times p'=(yz'-zy')i+(zx'-xz')j+(xy'-x'y)k$. A $(p,p')\times p,p'$ leképezés nem kommutatív művelet, amely mindkét oldalról disztributív az összeadásra nézve, és vektori szorzásnak, vagy külső szorzásnak szokás nevezni.

196. Definiálja kvaterniók abszolút értékét és sorolja fel a tulajdonságait.

Egy kvaternió abszolút értéke a hossza (mint vektornak): ha p=a+bi+cj+dk, ahol $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, akkor legyen p kvaternió abszolút értéke $|p|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$. Ha $p,q\in H$, akkor $p\overline{p}=|p|^2$, $|0|=0$, és $p\neq0$ esetén $|p|>0$, $|\overline{p}|=|p|$, $|pq|=|p||q|$, teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek, illetve $|\Re(p)|\leq|p|$, $|\Im(p)|\leq|p|$ és $|p|\leq|\Re(p)|+|\Im(p)|$. Úgy, mint a komplex számok esetében, belátható, hogy teljesül a $|p+q|\leq|p|+|q|$ háromszög-egyenlőtlenség és a $||p|-|q||\leq|p-q|$ egyenlőtlenség.

Véges halmazok

197. Definiálja halmazok ekvivalenciáját és sorolja fel tulajdonságait.

Az X és Y halmazokat ekvivalensnek nevezzük, ha lézetik X-et Y-ra leképező kölcsönösen egyértelmű leképezés. Jelölése: $X \sim Y$.

Legyenek X,Y,Z halmazok. Ekkor

(1) $X \sim X$ (reflexivitás);
(2) ha $X \sim Y$, akkor $Y \sim X$ (szimmetria);
(3) ha $X \sim Y$ és $Y \sim Z$, akkor $X \sim Z$ (tranzitivitás).

198. Ha az X és X' illetve Y és Y' halmazok ekvivalensek, milyen más halmazok ekvivalenciájára következtethetünk még ebből?

Hogy Y^X és $Y'^{X'}$ ekvivalensek illetve $X \times Y$ és $X' \times Y'$ is ekvivalnesek.

199. Definiálja a véges és a végtelen halmazok fogalmát.

Egy X halmazt végesnek nevezünk, ha valamely n természetes számra ekvivalens a $\{1,2,...,n\}$ halmazzal, egyébként végtelennek nevezzük.

200. Definiálja egy véges halmaz elemeinek számát. Hogyan jelöljük? Mit használt fel a definícióhoz?

Azt az egyértleműen meghatározott természetes számot, amelyre egy adott X véges halmaz ekvivalens $\{1,2,...,n\}$-nel, az X halmaz elemei számának vagy számosságának nevezzük, és card(A)-val jelöljük.

201. Fogalmazza meg a véges halmazok és elemszámuk tulajdonságait leíró tételt.

Legyenek X és Y halmazok. Ekkor

(1) ha X véges és $Y \subset X$, akkor Y is véges, és $\text{card}(Y) \leq \text{card}(X)$;
(2) ha X véges és $Y \subseteq X$(az alsó vonal át van húzva), akkor $\text{card}(Y) < \text{card}(X)$;
(3) ha X és Y végesek és diszjunktak, akkor $X \cup Y$ is véges, és $\text{card}(X \cup Y) = \text{card}(X) + \text{card}(Y)$;
(4) ha X és Y végesek, akkor $\text{card}(X \cup Y) + \text{card}(X \cap Y) = \text{card}(X) + \text{card}(Y)$;
(5) ha X és Y végesek, akkor $X \times Y$ is véges, és $\text{card}(XY) = \text{card}(X)\text{card}(Y)$;
(6) ha X és Y végesek, akkor X^Y is véges, és $\text{card}(X^Y) = \text{card}(X)^{\text{card}(Y)}$;
(7) ha X véges halmaz, akkor $\rho(X)$ is véges, és $\text{card}(\rho(X)) = 2^{\text{card}(X)}$;
(8) ha X véges, és az f függvény X-et Y-ra képezi, akkor Y is véges, $\text{card}(Y) \leq \text{card}(X)$, és ha f nem kölcsönösen egyértelmű, akkor $\text{card}(Y) < \text{card}(X)$.

202. Fogalmazza meg a skatulyaelvet.

Ha X és Y véges halmazok, és $\text{card}(X) > \text{card}(Y)$, akkor egy $f: X \rightarrow Y$ leképezés nem lehet kölcsönösen egyértelmű.

203. Mit mondhatunk véges halmazban minimális és maximális elem létezéséről?

Részben rendezett halmaz bármely nem üres véges részhalmazának van maximális és minimális eleme.

Kombinatorika

204. Mi a szokásos művelet permutációkra és milyen algebrai struktúrát kapunk?

Az X halmaz összes permutációi csoportot alkotnak a $\circ$ műveletre, azaz az összetett függvény képzésre, amelyben I_X az egységelem, és egy elem csoportbeli inverze a relációként vett inverze.

205. Mit mondhatunk egy véges halmaz összes permutációinak számáról?

Ha egy A halmaz ekvivalens $\{1,2,...,n\}$-nel, akkor permutációinak halmaza ekvivalens $\{1,2,...,n\}$ permutációinak halmazával. Ha $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ és $p_1,p_2,...,p_n$ az $\{1,2,...,n\}$ egy permutációja, akkor az A megfelelő permutációja az $a_i|\rightarrow a_{p_i}$ leképzés. Így A permutációinak száma csak n=card(A)-tól függ. Jelölje ezt a számot P_n. $P_n=n!$.

206. Mit értünk egy véges halmaz variációin és mit mondhatunk az összes variációk számáról?

Az A halmaz elemeiből készíthető, különböző tagokból álló $a_1,a_2,...,a_n$ sorozatokat, azaz $\{1,2,...,n\}$-t A-ba képező kölcsönösen egyértelmű leképzéseket az A halmaz k-ad osztályú variációinak nevezzük. Ha A véges halmaz, card(A)=n, akkor ezek V_n^k száma megegyezik az $\{1,2,...,k\}$-t $\{1,2,...,n\}$-be képező kölcsönösen egyértelmű leképezések számával. $V_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}=n(n-1)...(n-k+1)$, ha $k\leq n$ és nulla egyébként.

207. Mit értünk egy véges halmaz kombinációin és mit mondhatunk az összes kombinációk számáról?

Ha $k\in\mathbb{N}$, akkor A halmaz k elemű részhalmazait az A halmaz k-ad osztályú kombinációinak nevezzük. Ha A véges halmaz, akkor card(A)=n, akkor ezek C_n^k száma megegyezik a $\{1,2,...,n\}$ halmaz k elemű részhalmazainak számával. $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$, ha $k\leq n$, és nulla egyébként.

208. Mit értünk egy véges halmaz ismétléses kombinációin és mit mondhatunk az összes ismétléses kombinációk számáról?

Ha $k\in\mathbb{N}$, akkor A halmazból k elemet kiválasztva, de ismétéseket is megengedve, tekintet nélkül a sorrendre, az A halmaz k-ad osztályú ismétléses kombinációit kapjuk. Pontosabban, tekinsük mindazokat az $f:A\rightarrow\mathbb{N}$ függvényeket, amelyek csak véges sok helyen vesznek fel nem nulla értéket, és ezen értékek összege k; ezek az A halmaz ismétléses kombinációi. Ha A véges halmaz, akkor card(A)=n, így feltehetjük, hogy $A=\{1,2,..,n\}$. Minden $g:\{1,2,..,k\}\rightarrow\{1,2,...,n\}$ monoton növekedő hozzárendelve az $f(j)=card(g^{-1}(j))$ függvényt, kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kapunk A ismétléses kombinációi és az $\{1,2,...,k\}$-t $\{1,2,...,n\}$-be képező monoton növekedő függvények között, így ezek száma az A ismétléses kombinációinak ${}^iC_n^k$ száma. ${}^iC_n^k=\binom{n+k-1}{k}$.

209. Mit értünk egy véges halmaz ismétléses permutációin és mit mondhatunk az összes ismétléses permutációk számáról?

Ha $r,i_1,i_2,...,i_r\in\mathbb{N}$, akkor az $a_1,a_2,...,a_r$ (különböző) elemek $i_1,i_2,...,i_r$ ismétlődésű ismétléses permutációi az olyan $n=i_1+i_2+...+i_r$-tagú sorozatok, amelyekben az a_j elem i_j-szer fordul elő. Az $A=\{a_1,a_2,...,a_r\}$ jelöléssel ezek olyan $\{1,2,...,n\}$-et A-ba képező leképzések, amelyeknél a_j teljes inverz képe i_j elemű. $P_n^{i_1,i_2,...,i_r}=\frac{n!}{i_1!i_2!...i_r!}$.

210. Definiálja az ismétléses variációk fogalmát. Mit mondhatunk egy véges halmaz összes ismétléses variációinak számáról?

Az A halmaz elemeiből készíthető $a_1,a_2,...,a_k$ sorozatokat, azaz {1,2,...,k}-t A-ba képező leképezéseket az A halmaz k-ad osztályú ismétléses variációinak nevezzük. Ha A véges halmaz, card(A)=n, akkor ezek ${}^{i}V_n^k$ számáról (a $V_n^{k,i}$ jelölés is szokásos) már tudjuk, hogy n^k.

Polinomiális tétel, szita formula

211. Fogalmazza meg a binomiális tételt.

Legyenek x,y egy R kommutatív egységelemes gyűrű elemei, n∈ℕ. Ekkor $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$.

212. Írja fel a Pascal-háromszög első 8 sorát.

								1								
							1		1							
						1		2		1						
					1		3		3		1					
				1		4		6		4		1				
			1		5		10		10		5		1			
		1		6		15		20		15		6		1		
	1		7		21		35		35		21		7		1	
1		8		28		56		70		56		28		8		1

213. Mennyi a binomiális együtthatók összege, illetve váltakozó előjellel vett összege?

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n \quad \text{és} \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=0 \quad .$$

214. Fogalmazza meg a polinomiális tételt.

Legyen r∈ℕ, $x_1,x_2,...,x_r$ egy R kommutatív egységelemes gyűrű elemei, n∈ℕ. Ekkor $(x_1+x_2+...+x_r)^n=\sum_{i_1+i_2+...+i_r=n} P_n^{i_1,i_2,...,i_r} x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_r^{i_r}$.

215. Fogalmazza meg a logikai szita formulát.

Legyenek $X_1,X_2,...X_k$ az X véges halmaz részhalmazai, f az X-en értelmezett, értékeket egy Abel-csoportban felvevő függvény. Ha $1\le i_1<i_2<...<i_r\le k$, akkor legyen $Y_{i_1,i_2,...,i_r}=X_{i_1}\cap X_{i_2}\cap...\cap X_{i_r}$. Legyen továbbá $S=\sum_{x\in X} f(x)$, $S_r=\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_r\le k}\ \sum_{x\in Y_{i_1,i_2,...,i_r}} f(x)$, és legyen $S_0=\sum_{x\in X\setminus \bigcap_{i=1}^{k} X_i} f(x)$. Ekkor $S_0=S-S_1+S_2-S_3+...+(-1)^k S_k$.

Oszthatóság

216. Definiálja a természetes számok körében az oszthatóságot és adja meg jelölését.

Az m természetes számot az n természetes szám osztójának, az n-et pedig m többszörösének nevezzük, illetve azt mondjuk, hogy n osztható m-el, ha van olyan k természetes szám, hogy n=mk; jelölése m|n.

217. Sorolja fel a természetes számok körében az oszthatóság alaptulajdonságait.

A természetes számok körében
(1) ha m|n és m'|n', akkor mm'|nn';
(2) a nullának minden természetes szám osztója;
(3) a nulla csak saját magának osztója;
(4) az 1 minden természetes számnak az osztója;
(5) ha m|n, akkor mk|nk minden k∈ℕ-re;
(6) ha k∈ℕ⁺ és mk|nk, akkor m|n;
(7) ha $m|n_i$ és $k_i \in \mathbb{N}$, (i=1,2,...,j), akkor $m|\sum_{i=1}^{j} k_i n_i$;
(8) bármely nem nulla természetes szám bármely osztója kisebb vagy egyenlő, mint a szám;
(9) az | reláció reflexív, tranzitív és antiszimmetrikus, azaz részbenrendezés.

218. Definiálja a természetes számok körében a prímszám és a törzsszám fogalmát. Mi a kapcsolat a két fogalom között?

Ha egy n>1 természetes szám csak $1 \cdot n = n \cdot 1$ alakban írható fel természetes számok szorzataként, akkor törzsszámnak (vagy felbonthatatlannak, illetve irreducibilisnek) nevezzük. Ekkor n-nek nincs más osztója, mint 1 és saját maga. A p>1 természetes számot prímszámnak nevezzük, ha p|km (k,m∈ℕ) esetén p|k vagy p|m.

219. Definiálja egységelemes integritási tartományban az oszthatóságot és adja meg jelölését.

Legyen R egységelemes integritási tartomány. Ha a,b∈R, azt mondjuk, hogy b az a osztója, vagy a a b többszöröse, illetve hogy a osztható b-val, ha van olyan c∈R, hogy a=bc; jelölése b|a.

220. Sorolja fel egységelemes integritási tartományban az oszthatóság alaptulajdonságait.

Egy egységelemes integritási tartomány elemei körében
(1) ha b|a és b'|a', akkor bb'|aa';
(2) a nullának minden természetes szám osztója;
(3) a nulla csak saját magának osztója;
(4) az 1 minden elemnek az osztója;
(5) ha b|a, akkor bc|ac minden c∈R-re;
(6) ha bc|ac és c≠0, akkor b|a;
(7) ha $b|a_i$ és $c_i \in R$, (i=1,2,...,j), akkor $b|\sum_{i=1}^{j} c_i a_i$;
(8) az | reláció reflexív és tranzitív.

221. Definiálja az asszociáltak fogalmát és sorolja fel ennek a kapcsolatnak a tulajdonságait.

Legyen R egységelmes integritási tartomány. Ha a|b és b|a, akkor azt mondjuk, hogy a és b asszociáltak. Ez a reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív, azaz ekvivalenciareláció, továbbá kompatibilis a szorzással. A nullának nincs más asszociáltja, csak saját maga. Az | reláció kompatibilis ezzel az ekvivalenciarelációval, és az ekvivalenciaosztályokon tekintve részbenrendezést kapunk.

222. Definiálja az egységek fogalmát és sorolja fel az egységek halmazának tulajdonságait.

Egy elem asszociáltját leírhatjuk az 1 asszociáltjai segítségével, amelyek nem mások, mint 1 osztói, hiszen 1 bárminek osztója; ezeket egységeknek nevezzük. Az egységek R azon elemei, amelyeknek van a szorzásra nézve inverzük. Az egységek a szorzásra nézve Abel-csoportot alkotnak, a gyűrű egységcsoportját. Az egységek bármely $a \in R$-nak osztói, mert 1a-nak osztói.

223. Mi a kapcsolat az egységek és az asszociáltak kötött?

Az $a \in R$ asszociáltjai az εa alakú elemek, ahol ε egység.

224. Mi a kapcsolat a természetes számok és az egész számok körében vett oszthatóság között?

Mivel ha $k,m \in \mathbb{Z}$, akkor $|km|=|k| \cdot |m|$, az egész számok körében $m|n$ pontosan akkor teljesül, ha $|m|\,|\,|n|$ az $\mathbb{N}$-ben.

XXX. Definiálja a Gauss-egészek gyűrűjét. Igaz-e, hogy két egységelem van?

A $G=\{n+im:n,m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ úgynevezett Gauss-egészek egységelemes gyűrűt alkotnak. A ∓ 1 és $\mp i$ egységek. Mivel $|bc|^2=|b|^2|c|^2$, azt kapjuk, hogy b|a esetén $|b|^2|c|^2$, így nincs is más egység.

225. Definiálja egységelemes integritási tartományban a prímelem és az irreducibilis elem fogalmát. Mi a kapcsolat a két fogalom között?

Legyen R egységelemes integritási tartomány. Egy $0 \neq a \in R$ elemet felbonthatatlannak nevezünk, ha nem egység, és csak triviális módon írható fel szorzatként, tehát a=bc, $b,c \in R$ esetén b vagy c egység. A $0 \neq p \in R$ elemet prímelemnek nevezzük, ha nem egység és p|ab ($a,b \in R$) esetén p|a vagy p|b. Kapcsolat: minden prímelem felbonthatatlan, mert ha p=xy, akkor p|x esetén x=pz=x(yz) miatt yz=1, ahonnan y és z egységek, x és p pedig asszociáltak, és hasonlóan p|yesetén x egység, y és p pedig asszociáltak.

226. Mit értünk egységelemes integritási tartományban legnagyobb közös osztó alatt?

Azt mondjuk, hogy az R egységelmes integritási tartományban az $a_1,a_2,...,a_n \in R$ elemeknek a $b \in R$ elem legnagyobb közös osztója, ha i=1,2,...,n esetén $b|a_i$ és ha i=1,2,...,n esetén b'|a, akkor b'|b.

227. Mikor mondjuk egységelemes integritási tartomány elemeire, hogy relatív prímek?

R egységelemes integritási tartomány, és az $a_1,a_2,...,a_n \in R$. Ha az $a_1,a_2,...,a_n$ elemek legnagyobb közös osztói egységek, akkor azt mondjuk, hogy $a_1,a_2,...,a_n$ relatív prímek.

228. Mit értünk egységelemes integritási tartományban legkisebb közös többszörös alatt?

R egységelemes integritási tartomány. Azt mondjuk, hogy $b \in R$ az $a_1,a_2,...,a_n \in R$ elemek legkisebb közös többszöröse, ha i=1,2,...,n esetén $a_i|b$, és ha i=1,2,...,n esetén $a_i|b'$, akkor b|b'.

229. Egyértelmű-e az egész számok körében a legnagyobb közös osztó? Ismertesse a kapcsolódó jelölést.

Ha létezik az $a_1,a_2,...,a_n \in \mathbb{Z}$ számoknak legnagyobb közös osztója, akkor a legnagyobb közös osztók közül az egyik nemnegatív, ezt lnko($a_1,a_2,...,a_n$)-nel jelöljük.

230. Egyértelmű-e az egész számok körében a legkisebb közös többszörös? Ismertesse a kapcsolódó jelölést.

Ha létezik az $a_1,a_2,...,a_n \in \mathbb{Z}$ számoknak legkisebb közös többszöröse, akkor a legkisebb közös többszörösök közül az egyik nemnegatív, jelölje ezt lkkt($a_1,a_2,...,a_n$)-nel jelöljük.

231. Ismertesse a bővített euklidészi algoritmust.

Ez az eljárás meghatározza az $a,b \in \mathbb{Z}$ egészek egy d legnagyobb közös osztóját, valamint az $x,y \in \mathbb{Z}$ egész számokat úgy, hogy d=ax+by teljesüljön.

1. [inicializálás] Legyen $x_0 \leftarrow 1$, $y_0 \leftarrow 0$, $r_0 \leftarrow a$, $x_1 \leftarrow 0$, $y_1 \leftarrow 1$,$r_1 \leftarrow b$,$n \leftarrow 0$.
2. [vége?] Ha $r_{n+1}=0$, akkor $x \leftarrow x_n$, $y \leftarrow y_n$, $d \leftarrow r_n$, és az eljárás véget ért.
3. [ciklus] Legyen $q_{n+1} \leftarrow \lfloor \frac{r_n}{r_{n+1}} \rfloor$, $r_{n+2} \leftarrow r_n$ mod $r_{n+1}=r_n-r_{n+1}q_{n+1}$, $x_{n+2} \leftarrow x_n-x_{n+1}q_{n+1}$, $y_{n+2} \leftarrow y_n-y_{n+1}q_{n+1}$, $n \leftarrow n+1$ és menjünk (2)-re.

232. Mely tétel alapján számolhatjuk ki véges sok egész szám legnagyobb közös osztóját prímfelbontás nélkül?

Bármely $a_1,a_2,...,a_n \in \mathbb{Z}$ számoknak létezik legnagyobb közös osztója, és lnko($a_1,a_2,...,a_n$)=lnko(lnko(a_1,a_2),...,a_n).

233. Fogalmazza meg a számelmélet alaptételét.

Minden pozitív természetes szám a sorrendtől eltekintve egyértelműen felbontható prímszámok szorzataként.

234. Definiálja prímtényezős felbontásnál a kanonikus alakot.

A számelmélet alaptételében szereplő prímtényezős felbontást gyakran $n=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ alakban írjuk, ahol $p_1,p_2,...,p_k$ különböző prímek, a kitevők pedig $\mathbb{N}^+$ elemei. Ezt nevezzük a szám kanonikus alakjának.

235. Hogyan határozhatók meg természetes számok esetén az osztók, a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös a prímtényezős felbontás segítségével?

Ha mindnek adott a primétényezős felbontása, akkor közös osztóik, valamint hasonlóan közös többszöröseik is leolvashatóak. Ez a kanonikus alak: $n=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ ahol $p_1,p_2,...,p_k$ különböző prímek, a kitevők pedig $\mathbb{N}^+$ elemei.

236. Mi a kapcsolat két egész szám legnagyobb közös osztója és legkisebb közös többszöröse között?

Tetszőleges $a,b \in \mathbb{Z}$ számoknak létezik legkisebb közös többszöröse, és lnko(a,b) · lkkt(a,b)=|ab|.

237. Hogyan számolhatjuk ki véges sok egész szám legkisebb közös többszörösét prímfelbontás nélkül?

Tetszőleges $a_1,a_2,...,a_n \in \mathbb{Z}$ számoknak létezik legkisebb közös többszöröse, és $\text{lkkt}(a_1,a_2,...,a_n)=\text{lkkt}(\text{lkkt}(a_1,a_2),...,a_n)$.

238. Ismertesse Erathoszthenész szitáját.

Ha egy adott n-ig az összes prímet meg akarjuk találni, a következő egyszerű eljárás hatékony módszert ad: írjuk fel a számokat 2-től n-ig. Az első szám, a 2 prím, összes (valódi) többszöröse összetett, ezeket húzzuk ki. A megmaradó számok közül az első a 3, ez prím, ennek minden (valódi) többszöröse összetett, ezeket húzzuk ki stb. Az eljárás végén az n-nél nem nagyobb prímek maradnak meg.

Kongruenciák

239. Definiálja egész számok kongruenciáját és adja meg a kapcsolódó jelöléseket.

Ha $a,b,m \in \mathbb{Z}$ és m osztója a-b-nek, akkor azt mondjuk, hogy a és b kongruensek modulo m; ezt úgy jelöljük, hogy $a \equiv b \pmod{m}$.

240. Fogalmazza meg az egész számok kongruenciájának egyszerű tulajdonságait.

Ha a és b nem kongruensek modulo m, akkor azt mondjuk, hogy inkongruensek modulo m, és azt írjuk, hogy $a \equiv b \pmod{m}$(a három vonal át van húzva). Nyilván, ha $a \equiv b \pmod{m}$ és $d|m$, akkor $a \equiv b \pmod{m}$ is teljesül. Ha $0 \neq d \in \mathbb{Z}$, akkor $a \equiv b \pmod{m}$ ekivalens azzal, hogy $ad \equiv bd \pmod{md}$. Az oszthatóság tulajdonságaiból következik, hogy bármely adott $m \in \mathbb{Z}$-re a kongruencia ekvivalenciareláció $\mathbb{Z}$-ben. Az m és a -m szerinti kongruencia ugyanazt jelenti.

241. Definiálja a maradékosztály, redukált maradékosztály, teljes és redukált maradékrendszer fogalmát.

Egy $m \in \mathbb{Z}$ modulus szerinti kongruencia ekvivalenciaosztályait maradékosztályoknak nevezzük. Ha egy maradékosztály valamelyik eleme relatív prím a modulushoz, akkor mindegyik, és ekkor a maradékosztály redukált maradékosztálynak nevezzük. Páronként inkongruens egészek egy rendszerét maradékrendszernek nevezzük. Ha egy maradékrendszer minden maradékosztályából tartalmaz elemet, akkor teljes maradékrendszernek nevezzük. Ha egy maradékrendszer pontosan a redukált maradékosztályokból tartalmaz elemet, akkor redukált maradékrendszernek nevezzük.

242. Definiálja $m \in \mathbb{Z}$-et. Milyen algebrai struktúra $\mathbb{Z}_m$?

Egy $m \in \mathbb{Z}$ modulus szerinti kongruencia ekvivalenciaosztályait maradékosztályoknak nevezzük. A kongruencia kompatibilis az összeadással és a szorzással. Az ekvivalenciaosztályok kommutatív egységelemes gyűrűt alkotnak az összeadással és a szorzással. Ezt a gyűrűt $\mathbb{Z}_m$-el jelöljük.

243. Ismertesse a komplemens ábrázolásokat.

Negatív számok számítógépes ábrázolására elterjedt a komplemens ábrázolás. Csak binális gépek esetével foglalkozunk. Egy n-bites számítógépen használt lehetőségek $0 \leq k < 2^{n-1}$ esetén -k ábrázolására:

1. -k mod (2^n-1) kettes számrendszerbeli alakját tároljuk. Ezt úgy kapjuk, hogy k kettes számrendszerbeli alakját levonjuk 2^n-1 kettes számrendszerbeli alakjából. Mivel ez utóbbi csupa egyesből áll, a kivonás során nincs átvitel, k kettes számrendszerbeli alakját csak bitenként komplementáljuk. (egyesekre komplementálás)

2. Kettes komplementálás: k mod 2^n kettes számrendszerbeli alakját tároljuk. Ezt úgy kapjuk, hogy k kettes számrendszerbeli alakjának vesszük a bitenkénti komplementerét, majd hozzáadunk 1-et.

244. Fogalmazza meg a $\mathbb{Z}_m$ gyűrű tulajdonságait leíró tételt.

Legyen m>1 egész. Ha 1<lnko(a,m)<m, akkor a maradékosztálya nullosztó $\mathbb{Z}_m$-ben. Ha lnko(a,m)=1, akkor a maradékosztályának van miltiplikatív inverze $\mathbb{Z}_m$-ben. Speciálisan, ha m prímszám, akkor $\mathbb{Z}_m$ test.

245. Ismertesse a diszkrét logaritmus problémát.

$\mathbb{Z}_m$-ben nem nehéz hatványozni. Azonban a tapasztalat szerint még ha m prím is, $\mathbb{Z}_m$ invertálható elemeinek multiplikatív csoportjában egy a alap és egy a^k hatvány ismeretében nehéz meghatározni a k kitevőt, legalábbis ha m-1-nek vannak nagy prímtényezői: ez a diszkrét logaritmus probléma. A probléma számos más csoport esetén is nehéznek tűnik.

246. Ismertesse a Diffie-Hellmann-Merkle kulcscserét.

A felhasználók megállapodnak egy nagy Sophie Germain prímben, azaz olyan p prímben, amelyre q=2p+1 is prím valamint egy 1<g<p-1 alapban. Ha a két felhasználó valamely szokásos rejtjelzési rendszer, például az AES felhasználásával titkosított üzenetet akar váltani, akkor szükségük van egy véletlenszerű közös kulcsra. Választanak egy 1<a<p illetve 1<b<p véletlen kitevőt, kiszámolják, és közzéteszik a g^a mod q illetve g^b mod q értékeket. Mindketten ki tudják számolni g^{ab} mod q értékét, ez lesz a titkos kulcs. Az eljárás biztonsága azon múlik, hogy g, g^a mod q és g^b mod q ismeretében sem látszik jobb megoldás g^{ab} mod q meghatározására, mint az a és b megkeresése, ez viszont nehéz diszkrét logaritmus probléma. (Ezt a kulcscsere módszert használja az ssh, az SSL, és a TLS.)

247. Definiálja az Euler-féle φ függvényt.

Legyen m>0 egész szám, és jelölje φ(m) a modulo m redukált maradékosztályok számát; φ az Euler-féle φ függvény.

248. Mit mondhatunk az aa_i+b számokról, ha a_i egy maradékrendszer, illetve egy redukált maradékrendszer elemeit futja be?

Legyen m>1 egész szám, a relatív prím m-hez. Ha $a_1,a_2,...,a_m$ teljes maradékrendszer modulo m és $b\in\mathbb{Z}$, akkor $aa_1+b,aa_2+b,...,aa_m+b$ is teljes maradékrendszer modulo m. Ha $a_1,a_2,...,a_{\varphi(m)}$ redukált maradékrendszer modulo m, akkor $aa_1,aa_2,...,aa_{\varphi(m)}$ is redukált maradékrendszer modulo m.

249. Fogalmazza meg az Euler Fermat-tételt.

Legyen m>1 egész szám, a relatív prím m-hez. Ekkor $a^{\varphi(m)}\equiv 1$ (mod m).

250. Fogalmazza meg a Fermat-tételt.

Legyen p prímszám. Ha $a\in\mathbb{Z}$ és $p\nmid a$ akkor $a^{p-1}\equiv 1$ (mod p). Ha $a\in\mathbb{Z}$ tetszőleges, akkor $a^p\equiv 1$ (mod p).

251. Mit értünk diofantikus problémán?

Ha egy egyenlet vagy egyenletrendszer egész megoldásait keressük, akkor diofantikus problémáról beszélünk.

252. Mondjon két példát diofantikus problémára.

Például az $x^2+y^2=-4$ problémának valós megoldása nincs, az $x^4-4y^4=3$ egyenlet egyik oldala pedig modulo 4 kongruens 0-val vagy 1-el, a másik oldala pedig 3-mal, emiatt az egyenletnek nincs egész megoldása. Az $x^2+y^2=z^2$ egyenlet megoldásai a pitagoraszi számhármasok, míg ha $n>2$ egész, akkor a Fermat-sejtés szerint az $x^n+y^n=z^n$ egyenletnek nincsenek nem triviális egész megoldásai.

253. Fogalmazza meg a kínai maradéktételt.

Legyenek $m_1,m_2,...m_n$ egynél nagyobb, páronként relatív prím természetes számok, $c_1,c_2,...,c_n\in\mathbb{Z}$. Az $x\equiv c_j \pmod{m_j}$, $j=1,2,...,n$ kongruenciarendszer megoldható, és bármely két megoldása kongruens modulo $m_1,m_2,...m_n$.

254. Ismertesse az RSA eljárást.

Keressünk két nagy p,q pq prímet, és legyen $n=pq$. Válasszunk egy $1<e<(p-1)(q-1)$ kitevőt, és a bővített euklidészi algorimussal oljuk meg az $ed\equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$ kongruenciát. (Ha azt találjuk, hogy $\mathrm{lnkp}(e,(p-1)(q-1))>1$, akkor kezdjük elölről az eljárást) Ha $1<m<n$ egy üzenet, akkor $c=m^e \bmod n$ használható, mint az üzenet rejtjelezett formája. Ebből az üzenet újabb hatványozással visszakapható: $(m^e)^d=m^{k(p-1)(q-1)+1}=(m^{(p-1)})^{k(q-1)}\cdot m\equiv m \pmod p$, mert ha $p|m$, akkor mindkét oldal nullával kongruens, ha $p\nmid m$, akkor a Fermat-tétel szerint $m^{p-1}\equiv 1 \pmod p$. Hasonlóan $(m^e)^d\equiv m \pmod q$. Innen a kínai maradéktétel szerint, mivel $p\neq q$ prímek, $m=c^d \bmod n$. Az n és e értékek nyilvánosságra is hozhatók, ekkor bárki tud nekünk rejtjelezett üzenetet küldeni: az eljárás úgynevezett nyilvános kulcsú kódolás. Biztonsága azon múlik, hogy d, p, és q értékét más nem ismeri: az n prímtényezőinek meghatározása a mai módszerekkel nagyon sokáig tartana, mert nagy prímtényezők meghatározására nincs hatékony módszerünk.

255. Ismertesse az RSA eljárás felhasználását digitális aláírásra.

A (B kulcsával rejtjelezve) nemcsak m üzenetet, hanem $m^{d_A} \bmod n_A$ értékét is elküldi B-nek: ez az aláírás, amit csak A volt képes kiszámolni. Ha az üzenet m hosszú, célszerű egy h(m) véletlenszerűnek látszó lenyomatát használni aláírásnál m helyett.

256. Ismertesse az RSA eljárás felhasználását bizonyítványok kiállítására.

Egy hitelt érdemlő szervezettől, aminek nyilvános kulcsát mindenki ismeri, aláírt levélben kaphatjuk meg A nyilvános kulcsát, így ha A-tól levelet kapunk, biztosak lehetünk benne, hogy nem csalótól kaptunk üzenetet, aki A-nak adja ki magát.

Számelméleti függvények

257. Definiálja a számelméleti függvény, az additív számelméleti függvény és a teljesen additív számelméleti függvény fogalmát.

Egy $f:\mathbb{N}^+\to\mathbb{C}$ függvényt számelméleti függvénynek nevezünk. Ha relatív prím $m,n\in\mathbb{N}^+$ számok esetén $f(mn)=f(m)+f(n)$, akkor f-et additívnak nevezzük, ha pedig ez bármely $m,n\in\mathbb{N}^+$ esetén fennáll, akkor f-et teljesen additívnak nevezzük.

258. Definiálja a számelméleti függvény, a multiplikatív számelméleti függvény és a teljesen multiplikatív számelméleti függvény fogalmát.

Egy $f:\mathbb{N}^+\to\mathbb{C}$ függvényt számelméleti függvénynek nevezünk. Ha relatív prím $m,n\in\mathbb{N}^+$ számok esetén $f(mn)=f(m)f(n)$, akkor f-et multiplikatívnak nevezzük, ha pedig ez bármely $m,n\in\mathbb{N}^+$ esetén fennáll, akkor f-et teljesen multiplikatívnak nevezzük.

259. Fogalmazza meg az additív, multiplikatív, teljesen additív és teljesen multiplikatív számelméleti függvények kiszámítására vonatkozó tételt.

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$. Ekkor

(1) ha f additív számelméleti függvény, akkor $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + \dots + f(p_k^{\alpha_k})$;

(2) ha f multiplikatív számelméleti függvény, akkor $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdot f(p_2^{\alpha_2}) \cdot \dots \cdot f(p_k^{\alpha_k})$;

(3) ha f teljesen additív számelméleti függvény, akkor $f(n)=\alpha_1 f(p_1)+\alpha_2 f(p_2)+\dots+\alpha_k f(p_k)$;

(4) ha f teljesen multiplikatív számelméleti függvény, akkor $f(n)=f(p_1)^{\alpha_1} \cdot f(p_2)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot f(p_k)^{\alpha_k}$.

260. Adjon egyszerű példákat additív, multiplikatív, teljesen additív és teljesen multiplikatív számelméleti függvényekre.

Az azonosan nulla függvény nyilván teljesen additív és teljesen multiplikatív is. Az Euler-féle φ függvény multiplikatív. Legyen a μ Möbius-függvény a következő: $\mu(n)=0$, ha n osztható egy prímszám négyzetével, és $\mu(n)=(-1)^k$, ha pontosan k darab különböző prímszám szorzata. Ekkor μ multiplikatív de nem teljesen multiplikatív. Ha $\nu(n)$ az n szám különböző prímosztóinak száma, akkor ν additív számelméleti függvény, de nem teljesen additív számelméleti függvény.

261. Definiálja μ, κ és ν számelméleti függvényeket. Milyen tulajdonságúak?

Legyen $\mu(n)=(0)$, ha n osztható egy prímszám négyzetével, és $\mu(n)=(-1)^k$, ha n pontosan k darab különböző prímszám szorzata. A definíció alapján ellenőrizhető, hogy μ multiplikatív, de nem teljesen multiplikatív. Legyen $\nu(n)$ az n szám különböző prímosztóinak száma. Ekkor ν additív számelméleti függvény, de nem teljesen additív. Legyen $\kappa(n)$ az n szám prímtényezőinek száma. κ teljesen additív számelméleti függvény.

262. Definiálja τ, σ és σ_r számelméleti függvényeket. Milyen tulajdonságúak?

Ha r tetszőleges valós szám, legyen $\sigma_r(n)= \sum_{0<d|n} d^r$, és legyen $\tau=\sigma_0$, $\sigma=\sigma_1$, azaz τ az osztók száma, σ pedig az osztók összege.

263. Írja fel τ, σ és σ_r számelméleti függvények kiszámítására használható formulákat.

Ebben és az előzőben nem vagyok nagyon biztos.

264. Fogalmazza meg az Euler-féle φ függvény kiszámítására vonatkozó tételt.

Az Euler-féle φ függvény multiplikatív, és ha $n \in \mathbb{N}^+$ kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$\varphi(n) = \prod_{j=1}^{k} (p_j^{\alpha_j} - p_j^{\alpha_j - 1}) = n \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) .$$

265. Ismertesse az intervallum-aritmetikát.

Kiválasztási axióma

XXX. Fogalmazza meg a kiválasztási axiómát.

Nem üres halmazok bármely családjához létezik kiválasztási függvény.

XXX. Fogalmazza meg a Zorn-lemmát.

Ha egy részbenrendezett halmaz minden lánca felülről korlátos, akkor a halmaznak van maximális eleme.

XXX. Fogalmazza meg a jólrendezési tételt.

Minden halmaz jólrendezhető.

266. Mikor mondjuk, hogy egy halmaz majorál egy másikat. Mikor mondjuk, hogy egy halmaz szigorúan majorál egy másikat?

Ha X és Y halmazok, és X ekvivalens Y valamely részhalmazával, akkor azt írjuk, hogy $X \precsim Y$ vagy $Y \succsim X$, és azt mondjuk, ha Y majorálja X-et. Azt, hogy van-e minden X halmazhoz olyan Y, amelyre $X \prec Y$, ahol $X \prec Y$ (vagy $Y \succ X$) azt jelenti, hogy $X \precsim Y$, de $X \nsim Y$, úgy nevezzük, hogy Y szigorúan majorálja X-et.

267. Milyen nyilvánvaló tulajdonságai vannak halmazok majorálásának?

Véges halmazokra $X \precsim Y$ azzal ekvivalens, hogy card(X)≤card(Y). Minden halmazra $X \precsim X$ (reflexivitás), ha $X \precsim Y$ és $Y \precsim Z$, akkor $X \precsim Z$ (tranzitivitás).

268. Fogalmazza meg a Schröder Bernstein-tételt.

Ha $X \precsim Y$ és $Y \precsim X$, akkor X~Y.

269. Fogalmazza meg a Schröder Bernstein-tétel szigorú majorálására vonatkozó következményét.

Ha $X \prec Y$ és $Y \precsim Z$, vagy ha $X \precsim Y$ és $Y \prec Z$, akkor $X \prec Z$.

270. Fogalmazza meg a halmazok összehasonlíthatóságára vonatkozó tételt.

Ha X és Y halmazok, akkor $X \precsim Y$ vagy $Y \precsim X$.

271. Fogalmazza meg Cantor tételét.

Bármely X halmazra $X \prec \rho(X)$.

272. Definiálja a megszámlálható végtelen és a megszámlálható fogalmát.

Egy halmazt megszámlálható végtelennek nevezünk, ha ekvivalens $\mathbb{N}$-el. Ha egy halmaz véges, vagy megszámlálható végtelen, akkor megszámlálhatónak nevezzük.

273. Adjon a megszámlálható végtelen fogalma segítségével szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy halmaz végtelen legyen.

Egy halmaz akkor és csak akkor végtelen, ha van megszámlálható végtelen részhalmaza.

274. Adjon $\mathbb{N}$ segítségével szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy halmaz véges, megszámlálható illetve végtelen legyen.

Egy X halmaz akkor és csak akkor véges, ha $X \prec N$, akkor és csak akkor megszámlálható, ha $X \precsim N$, és akkor és csak akkor végtelen, ha $N \precsim X$.

275. Mit mondhatunk megszámlálható halmaz részhalmazáról?

Megszámlálható halmaz bármely részhalmaza is megszámlálható.

276. Adjon $\mathbb{N}$ segítségével szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy nem üres halmaz megszámlálható legyen.

Egy X nem üres halmaz akkor és csak akkor megszámlálható, ha létezik $\mathbb{N}$-et X-re leképező leképezés.

277. Mely halmazműveletekre bizonyítottuk, hogy nem vezetnek ki a megszámlálható halmazok köréből?

Megszámlálható halmazok megszámlálható családjának az egyesítése megszámlálható.

278. A $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}^n$ ($n\in\mathbb{N}$), $\mathbb{R}^n$ ($n\in\mathbb{N}$), $\cup_{n=0}^{\infty}$ $\mathbb{N}^n$, $\rho(\mathbb{N})$ halmazok közül melyek megszámláhatóak?

A $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}^n$ ($n\in\mathbb{N}$), $\cup_{n=0}^{\infty}$ $\mathbb{N}^n$ megszámlálható halmazok.

279. Egy végtelen halmaz és egy megszámlálható halmaz unióját képezzük. Mit állíthatunk az unióról?

Ha X megszámlálható halmaz, Y végtelen halmaz, akkor $X\cup Y\sim Y$.

280. Adjon valódi részhalmazok segítségével szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy halmaz végtelen legyen.

Egy halamaz akkor és csak akkor végtelen, ha ekvivalens egy valódi részhalmazával.

281. Definiálja a kontinuum számosságú halmaz fogalmát.

Az X halmazt kontinuum számosságúnak nevezzük, ha ekvivalens $\mathbb{R}$-el.

282. Az $\mathbb{R}$ mely részhalmazairól bizonyítottuk, hogy kontinuum számosságúak?

Az $\mathbb{R}$ és a]0,1[,]0,1], [0,1[és részintervallumai ekvivalansek, így kontinuum számosságúak.

283. A $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}^n$ ($n\in\mathbb{N}$), $\mathbb{R}^n$ ($n\in\mathbb{N}$), $\cup_{n=0}^{\infty}$ $\mathbb{N}^n$, $\rho(\mathbb{N})$ halmazok közül melyek kontinuum számosságúak?

A $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ ($n\in\mathbb{N}$), $\rho(\mathbb{N})$ halmazok kontinuum számosságúak, ekvivalensek $\mathbb{R}$-el.

Bizonyítások

1. Fogalmazza meg a halmazok uniójának kommutativitását, asszociativitását és idempotenciáját, és bizonyítsa be.

Állítás:
(1) $A\cup B=B\cup A$ (kommutativitás),
(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (asszociativitás),
(3) $A\cup A=A$ (idempotencia).
Bizonyítás:
(1) $x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A$ vagy $x\in B \Leftrightarrow x\in B$ vagy $x\in A \Leftrightarrow x\in B\cup A$
(2) $x\in(A\cup B)\cup C \Leftrightarrow x\in(A\cup B)$ vagy $x\in C \Leftrightarrow (x\in A$ vagy $x\in B)$ vagy $x\in C \Leftrightarrow x\in A$ vagy $(x\in B$ vagy $x\in C) \Leftrightarrow x\in A$ vagy $x\in(B\cup C) \Leftrightarrow x\in A\cup(B\cup C)$
(3) $x\in(A\cup A) \Leftrightarrow x\in A$ vagy $x\in A \Leftrightarrow x\in A$

2. Fogalmazza meg a halmazok metszetének kommutativitását, asszociativitását és idempotenciáját, és bizonyítsa be.

Állítás:
(1) $A\cap B=B\cap A$ (kommutativitás),
(2) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (asszociativitás),
(3) $A\cap A=A$ (idempotencia).
Bizonyítás:
(1) $x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A$ és $x\in B \Leftrightarrow x\in B$ és $x\in A \Leftrightarrow x\in B\cap A$
(2) $x\in(A\cap B)\cap C \Leftrightarrow x\in(A\cap B)$ és $x\in C \Leftrightarrow (x\in A$ és $x\in B)$ és $x\in C \Leftrightarrow x\in A$ és $(x\in B$ és $x\in C) \Leftrightarrow x\in A$ és $x\in(B\cap C) \Leftrightarrow x\in A\cap(B\cap C)$
(3) $x\in(A\cap A) \Leftrightarrow x\in A$ és $x\in A \Leftrightarrow x\in A$

3. Fogalmazza meg és bizonyítsa be az unió és a metszet disztributivitását.

Állítás:
(1) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
(2) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
Bizonyítás:
(1) $x\in A\cup(B\cap C) \Leftrightarrow x\in A$ vagy $x\in(B\cap C) \Leftrightarrow x\in A$ vagy $(x\in B$ és $x\in C) \Leftrightarrow (x\in A$ vagy $x\in B)$ és $(x\in A$ vagy $x\in C) \Leftrightarrow x\in(A\cup B)$ és $x\in(A\cup C) \Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.
(2) $x\in A\cap(B\cup C) \Leftrightarrow x\in A$ és $x\in(B\cup C) \Leftrightarrow x\in A$ és $(x\in B$ vagy $x\in C) \Leftrightarrow (x\in A$ és $x\in B)$ vagy $(x\in A$ és $x\in C) \Leftrightarrow x\in(A\cap B)$ vagy $x\in(A\cap C) \Leftrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

4. Fogalmazza meg és bizonyítsa be a De Morgan azonosságokat két halmazra.

Állítás:
(1) $(A\cup B)'=A'\cap B'$
(2) $(A\cap B)'=A'\cup B'$
Bizonyítás:
(1) $x\in(A\cup B)' \Leftrightarrow x\notin(A\cup B) \Leftrightarrow x\notin A$ és $x\notin B \Leftrightarrow x\in A'$ és $x\in B' \Leftrightarrow x\in A'\cap B'$
(2) $x\in(A\cap B)' \Leftrightarrow x\notin(A\cap B) \Leftrightarrow x\notin A$ vagy $x\notin B \Leftrightarrow x\in A'$ vagy $x\in B' \Leftrightarrow x\in A'\cup B'$

5. Mi a rendezett pár alaptulajdonsága? Bizonyítsa be, hogy rendelkezik vele.

Állítás:
Bármely x,y esetén legyen $(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$.
(1) $x=u$ és $y=v$ esetén nyilván $(x,y)=(u,v)$.
(2) Ha $(x,y)=(u,v)$, akkor $\{x,y\}=\cup(x,y)=\cup(u,v)=\{u,v\}$, és így $x=u$ és $y=v$ vagy pedig $x=v$ és $y=u$. Az utóbbi eset azonban $x\neq y$ esetén lehetetlen, mert ekkor $\{\{x\},\{x,y\}\}\neq\{\{y\},\{y,x\}\}$.

<u>Bizonyítás:</u>

(1) x=u és y=v esetén (x,y)=(u,v)

(x,y)={{x},{x,y}}, (u,v)={{u},{u,v}}, tehát (x,y)={{x},{x,y}}={{u},{u,v}}=(u,v), mert (x,y)=(u,v).

(2) (x,y)=(u,v) esetén $\{x,y\}=\cup(x,y)=\cup(u,v)=\{u,v\}$, és így x=u és y=v vagy x=v és y=u. A második eset $x\neq y$ esetén lehetetlen, mert ekkor $\{\{x\},\{x,y\}\}\neq\{\{y\},\{y,x\}\}$.

6. Bizonyítsa be, hogy a binér relációk kompozíciója asszociatív.

<u>Állítás</u>:

Legyenek A,B,C,D,E,F adott halmazok, $f\subset A\times B$, $g\subset C\times D$, $h\subset E\times F$, ekkor $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$ fennáll.

<u>Bizonyítás</u>:

$(x,y)\in f\circ(g\circ h) \Leftrightarrow \exists z\in \boldsymbol{D}_g\cap\boldsymbol{R}_h\supset\boldsymbol{D}_{f\circ g}\cap\boldsymbol{R}_h$ úgy, hogy $(x,z)\in h$ és $(z,y)\in f\circ g \Leftrightarrow \exists z\in\boldsymbol{D}_g\cap\boldsymbol{R}_h$ úgy, hogy $(x,z)\in h$ és $\exists u\in\boldsymbol{D}_f\cap\boldsymbol{R}_g$ úgy, hogy $(z,u)\in g$ és $(u,y)\in f \Leftrightarrow$ ha $\exists u\in\boldsymbol{D}_f\cap\boldsymbol{R}_g\supset\boldsymbol{D}_f\cap\boldsymbol{R}_{g\circ h}$ úgy, hogy $(x,u)\in g\circ h$ és $(u,y)\in f \Leftrightarrow$ ha $(x,y)\in(f\circ g)\circ h$.

7. Fogalmazza meg a két binér reláció kompozíciójának inverzére vonatkozó állítást, és bizonyítsa be.

<u>Állítás</u>:

Legyenek A,B,C,D adott halmazok, $f\subset A\times B$, $g\subset C\times D$, ekkor $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$ fennáll.

<u>Bizonyítás</u>:

$(x,y)\in(f\circ g)^{-1} \Leftrightarrow (y,x)\in f\circ g \Leftrightarrow \exists z\in\boldsymbol{D}_f\cap\boldsymbol{R}_g$ úgy, hogy $(y,z)\in g$ és $(z,x)\in f \Leftrightarrow \exists z\in\boldsymbol{R}_{f^{-1}}\cap\boldsymbol{D}_{g^{-1}}$ úgy, hogy $(z,y)\in g^{-1}$ és $(x,z)\in f^{-1} \Leftrightarrow (x,y)\in g^{-1}\circ f^{-1}$.

8. Fogalmazza meg az ekvivalenciareláció és az osztályozás kapcsolatát és bizonyítsa be.

<u>Állítás</u>:

Valamely X halmazon értelmezett ~ ekvivalenciareláció X-nek egy osztályfelbontását adja. Megfordítva, az X halmaz minden osztályfelbontása egy ~ ekvivalenciarelációt hoz létre.

<u>Bizonyítás</u>:

Legyen ~ egy X-beli ekvivalenciareláció, és legyen $\tilde{x}=y\in X:y\sim x$ az X halmaz x eleme segítségével definiált részhalmaza. Megmutatjuk, hogy az $\tilde{X}=\tilde{x}:x\in X$ halmaz az X egy osztályozása. Mivel ~ reflexív, $x\in\tilde{x}$, vagyis az $\tilde{x}$ részhalmaz nem üres, és az X halmaz minden x eleme benne van a $\tilde{X}$ valamely elemében, például $\tilde{x}$-ban. Csak azt kell belátnunk, hogy a különböző részhalmazok metszete üres. Ha $\tilde{x}\cap\tilde{y}\neq\emptyset$, akkor legyen z a metszet egy eleme. Ekkor z~x és z~y, amiből a szimmetria és a tranzitivitás miatt x~y. Ha most $w\in\tilde{x}$, akkor a tranzitivitás miatt $w\in\tilde{y}$. Hasonlóan, a szimmetria és a tranzitivitás miatt, ha $w\in\tilde{y}$, akkor $w\in\tilde{x}$. Azt kaptuk tehát, hogy $\tilde{x}=\tilde{y}$, azaz ha két részhalmaznak van közös eleme, akkor azonosak, vagyis különböző $\tilde{x}$ részhalmazok diszjunktak, ezért valóban az X egy osztályfelbontását kaptuk, és $\tilde{x}$ az x-et tartalmazó osztály. Megfordítva, legyen O az X egy osztályozása. Legyen $R=\{(x,y)\in X\times X$: x és y az O ugyanazon halmazának elemei$\}$. Ez az R nyilván reflexív, szimmetrikus és mivel az osztályok páronként diszjunktak, tranzitív is, tehát ekvivalenciareláció.

9. Fogalmazza meg a szigorú részbenrendezés kapcsolatát a részbenrendezéssel és bizonyítsa be állítását.

<u>Állítás</u>:

Ha R részbenrendezés és S szigorú részbenrendezés az A halmazon, akkor:

(1) $R\setminus I_x$ szigorú részbenrendezés,

(2) $S \cup I_x$ részbenrendezés, és
(3) $S = R \setminus I_x$ pontosan akkor, ha $S \cup I_x = R$.

Bizonyítás:

(1) $R \setminus I_x$ nyilván irreflexív. Ha $(a,b) \in R \setminus I_x$, akkor $a \neq b$, amiből a R antiszimmetriája miatt $(b,a) \notin R$. Ezért $(b,a) \notin R \setminus I_x$, amiből a szigorú antiszimmetria adódik. Tegyük most fel, hogy $(a,b),(b,c) \in R \setminus I_x$. Ekkor R tranzitivitásából $(a,c) \in R$. Mivel $R \setminus I_x$ szigorúan antiszimmetrikus, ezért $c \neq a$, így $(a,c) \in R \setminus I_x$. Ezzel $R \setminus I_x$ tranzitiviását is bebizonyítottuk.

(2) $S \cup I_x$ reflexívitása a diagonális reláció (I_x) definíciójából következik. Ha $(a,b) \in S$, akkor $(b,a) \notin S$.Vagyis $(a,b),(b,a) \in S \cup I_x$ csak akkor lehetséges, ha $(a,b),(b,a) \in I_x$. Ez pedig $S \cup I_x$ antiszimmetriáját jelenti. Tegyük fel, hogy $(a,b),(b,c) \in S \cup I_x$. Ha $(a,b),(b,c) \in S$, akkor a tranzitivitás miatt $(a,c) \in S$. Ha egyikük S-nek eleme, a másik pedig I_x-beli, akkor (a,c) megegyezik (a,b) és (b,c) valamelyikével, és így ugyancsak S-beli. Amennyiben pedig $(a,b),(b,c) \in I_x$, akkor (a,c) is az. Vagyis mindig $(a,c) \in S \cup I_x$-nak, ami bizonyítja a tranzitivitást.

(3) következik (1)-ből és (2)-ből.

10. Mi a kapcsolat a szigorúan monoton növekvő függvények és a kölcsönösen egyértelmű függvények között? A megfogalmazott állítást bizonyítsa be.

Állítás:

Ha X,Y rendezettek, akkor szigorúan monoton növekedő (illetve csökkenő) függvény nyilván kölcsönösen egyértelmű. Megfordítva, ha X,Y rendezettek, akkor egy $f:X \to Y$ kölcsönösen egyértelmű monoton növekedő (illetve csökkenő) leképezés szigorúan monoton növekedő (illetve csökkenő) is, és az inverze is monoton növekedő (illetve csökkenő) f(X)-en.

Bizonyítás:

Ha $x<y$, akkor $f(x) \leq f(y)$, de $f(x)=f(y)$ nem lehetséges, és ha $u,v \in f(X)$, $u \leq v$, $x=f^{-1}(u)$, $y=f^{-1}(v)$, akkor $x>y$ nem lehetséges, mert ebből $x \geq y$ és $x \neq y$ miatt $f(x) \geq f(y)$, de $f(x) \neq f(y)$, azaz $u=f(x)>f(y)=v$ következne. Folyt.köv.

XXX. Mikor állíthatjuk, hogy két függvény összetétele injektív, szürjektív, illetve bijektív? Bizonyítsa be állítását.

Állítás:

Legyenek $g:X \to Y$ és $f:Y \to Z$ adott függvények.

(1) Ha f és g injektív, akkor $f \circ g$ is az.
(2) Ha f és g szürjektív, akkor $f \circ g$ is az.
(3) Ha f és g bijektív, akkor $f \circ g$ is az.

Bizonyítás:

1. Tegyük fel, hogy $(f \circ g)(x)=(f \circ g)(y)$, ahol $x,y \in X$. Ekkor $f(g(x))=f(g(y))$, így f injektívitásából adódik, hogy $g(x)=g(y)$, melyből g injektivitása miatt kapjuk, $x=y$, tehát az $f \circ g$ injektív.
2. g és f szürjektivitása miatt $(f \circ g)(X)=f(g(X))=f(Y)=Z$, tehát $f \circ g$ is szürjektív.
3. Az állítás az előző két állítás következménye.

11. Mit állíthatunk a monoton növekvő függvények inverz függvényéről? A megfogalmazott állítást bizonyítsa be.

12. Fogalmazza meg a halmazcsaládokra vonatkozó De Morgan-szabályokat, és bizonyítsa be őket.

Állítás:

Ha X_i, $i\in I$ az X halmaz részhalmazainak egy nem üres családja (azaz $I\neq\emptyset$), akkor az X-re vonatkozó komplementert vesszővel jelölve,

1. $(\cup_{i\in I}X_i)'=\cap_{i\in I}X_i'$;
2. $(\cap_{i\in I}X_i)'=\cup_{i\in I}X_i'$.

Bizonyítás:

1. $x\in(\cap_{i\in I}X_i)' \Leftrightarrow x\notin(\cap_{i\in I}X_i) \Leftrightarrow \exists i\in I: x\notin X_i \Leftrightarrow \exists i\in I: x\in X_i' \Leftrightarrow x\in\cup_{i\in I}X_i'$;
2. $x\in(\cup_{i\in I}X_i)' \Leftrightarrow x\notin(\cup_{i\in I}X_i) \Leftrightarrow \forall i\in I: x\notin X_i \Leftrightarrow \forall i\in I: x\in X_i' \Leftrightarrow x\in\cap_{i\in I}X_i'$.

13. Fogalmazza meg a halmazműveletek és a függvény kapcsolatáról tanult állításokat. A megfogalmazott állításokat bizonyítsa be.

Állítás:

Legyen $f:X\rightarrow Y$ egy függvény, B, $B_i\subset Y$, ha $i\in I\neq\emptyset$. Ekkor

1. $f^{-1}(\cup_i B_i)=\cup_i f^{-1}B_i$;
2. $f^{-1}(\cap_i B_i)=\cap_i f^{-1}B_i$;
3. $f^{-1}(Y\setminus B)=X\setminus f\text{-}1(B)$.

Bizonyítás:

14. Bizonyítsa be, hogy ha $n\in\mathbb{N}$, akkor $n\neq n^+$ és ha $0\neq n\in\mathbb{N}$, akkor van olyan $m\in\mathbb{N}$, hogy $n=m^+$.

Állítás:

1. Ha $n\in\mathbb{N}$, akkor $n\neq n^+$.
2. Ha $0\neq n$, akkor van olyan $m\in\mathbb{N}$, hogy $n=m^+$.

Bizonyítás:

1. $S=\{n\in\mathbb{N}:n^+\neq n\}$ halmaz tartalmazza 0-t, mert ha $n\in\mathbb{N}$, akkor $n^+\neq 0$ (Peano (3)), és tartalmazza n-t, akkor n^+-t is, mert $(n^+)^+=n^+$-ból $n^+=n$ következne (Peano (4) ha $n,m\in\mathbb{N}$ és $n^+=m^+$, akkor $n=m$), így $S\subset\mathbb{N}$, $0\in S$ és ha $n\in S$, akkor $n^+\in S$, akkor $S=\mathbb{N}$.
2. $S=\{0\}\cup\{n\in\mathbb{N}$: van olyan $m\in\mathbb{N}$, amelyre $m^+=n\}$ halmazra $0\in S$, és ha $n\in S$, akkor $n^+=(m^+)^+\in S$, így $S\subset\mathbb{N}$, $0\in S$ és ha $n\in S$, akkor $n^+\in S$, akkor $S=\mathbb{N}$.

15. Fogalmazza meg és bizonyítsa be a természetes számok egyértelműségére vonatkozó tételt.

Állítás:

Tegyük fel, hogy $\mathbb{N}$ és $\mathbb{N}'$ is eleget tesz a Peano-axiómáknak. Ekkor létezik olyan φ kölcsönösen egyértelmű leképezése $\mathbb{N}$-nek $\mathbb{N}'$-re, amelyre $\varphi(0)=0$ és $\varphi(n^+)=(\varphi(n))^+$ $\forall n\in\mathbb{N}$-re.

Bizonyítás:

$X=\mathbb{N}'$-re $a=0\in\mathbb{N}'$-re és $f={}^+$-ra kapjuk φ-t. Mivel az értékkészlet tartalmazza 0-t, és ha tartalmazza n'-t, akkor n'^+-t is, φ az $\mathbb{N}'$-re képez. Jelölje S az $\mathbb{N}'$ azon elemeit, amelyek csak egy $n\in\mathbb{N}$ képeként lépnek fel. Nyilván $0\in S$, mert az értékkészlet minden más eleme valaminek a rákövetkezője. Ha $n'\in S$, akkor csak egy olyan $n\in\mathbb{N}$ létezik, amelyre $\varphi(n)=n'$. Definíció szerint $\varphi(n^+)=n'^+$. Ha valamely m-re $\varphi(m)=n'^+$, akkor ez az m nem lehet 0, így $m=k^+$. De $\varphi(k^+)=(\varphi(k))^+$, így $\varphi(k)=n'$, amiből $k=n$, tehát $m=n^+$ következik, vagyis $n'^+\in S$. Tehát $S=\mathbb{N}'$.

16. Fogalmazza meg és bizonyítsa be a természetes számok összeadásának alaptulajdonságait kimondó tételt, a kommutativitást kivéve.

Állítás:

Ha $k,m,n\in\mathbb{N}$, akkor

(1) $(k+m)+n=k+(m+n)$ (asszociativitás)

(2) $0+n=n+0=n$ (a 0 nullelem)
(3) $m+n=n+m$ (kommutativitás)
(4) ha $m+k=n+k$, akkor $m=n$ (egyszerűsítési szabály vagy törlési szabály)
Bizonyítás:

1. n szerinti teljes indukcióval. A rekurziótétel alapján $k=s_k(0)=k+0$ minden $k\in\mathbb{N}$-re. Az $n=0$ esetben $(k+m)+0=k+m=k+(m+0)$. Tegyük fel, hogy $n\in\mathbb{N}$-re igaz az állítás. Belátjuk, hogy akkor $n^+\in\mathbb{N}$-re is igaz. $(k+m)+n^+=((k+m)+n)^+=(k+(m+n))^+$ (az indukciós feltevés miatt)$=k+(m+n)^+=k+(m+n^+)$
2. n szerinti indukcióval. $0+n=n$ az $n=0$ esetben nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $n\in\mathbb{N}$-re igaz az állítás. Ekkor $0+n^+=(0+n)^+=n^+$, így az állítás minden $n\in\mathbb{N}$-re teljesül. Az $n+0=n$ egyenlőség az összeadás definíciójából következik.
3. Ezt itt nem kell bizonyítani.
4. k szerinti indukcióval. A $k=0$ esetben nyilvánvaló, és ha k-ra teljesül az állítás, akkor $m+k^+=n+k^+$-ból $(m+k)^+=(n+k)^+$, így $m+k=n+k$, amiből az indukciós feltevés miatt $m=n$.

17. Fogalmazza meg a természetes számok összeadásának alaptulajdonságait kimondó tételt, és bizonyítsa be a kommutativitást.

Állítás:
Ha $k,m,n\in\mathbb{N}$, akkor

1. $(k+m)+n=k+(m+n)$ (asszociativitás)
2. $0+n=n+0=n$ (a 0 nullelem)
3. $m+n=n+m$ (kommutativitás)
4. ha $m+k=n+k$, akkor $m=n$ (egyszerűsítési szabály vagy törlési szabály)

Bizonyítás:
(3) Először n szerinti indukcióval belátjuk, hogy rögzített $m\in\mathbb{N}$ esetén $m^++n=(m+n)^+$ minden $n\in\mathbb{N}$-re. Az $n=0$ eset $m^++0=m^+=(m+0)^+$ miatt teljesül. Tegyük fel, hogy $m^++n=(m+n)^+$ valamilyen $n\in\mathbb{N}$-re. Ekkor $m^++n^+=(m^++n)^+=((m+n)^+)^+=(m+n^+)^+$, vagyis az állítás minden $n\in\mathbb{N}$-re igaz. Megmutatjuk, hogy $m+n=n+m$ minden $n\in\mathbb{N}$-re. Az $n=0$ eset nyilvánvaló. Indukcióval bizonyítva tegyük fel, hogy valamilyen $n\in\mathbb{N}$-re igaz az állítás. Ekkor $m+n^+=(m+n)^+=(n+m)^+=n^++m$, vagyis $m+n=n+m$ minden $n\in\mathbb{N}$-re teljesül.

18. Fogalmazza meg és bizonyítsa be a természetes számok szorzásának alaptulajdonságait kimondó tételt, a kommutativitást kivéve.

Állítás:
Ha $k,m,n\in\mathbb{N}$, akkor
(1) $(k\cdot m)\cdot n=k\cdot (m\cdot n)$ (asszociativitás)
(2) $0\cdot n=n\cdot 0=0$
(3) $1\cdot n=n\cdot 1=n$ (az 1 egységelem)
(4) $m\cdot n=n\cdot m$ (kommutativitás)
(5) $k\cdot (m+n)=k\cdot m+k\cdot n$ (disztributivitás)
Bizonyítás:
(1) n szerinti indukcióval. Az $n=0$ esetben $(k\cdot m)\cdot 0=0=k\cdot 0=k\cdot (m\cdot 0)$. Tegyük fel, hogy $n\in\mathbb{N}$-re igaz az állítás. Ekkor$(k\cdot m)\cdot n^+=(k\cdot m)\cdot n+k\cdot m=k\cdot (m\cdot n)+k\cdot m=k\cdot (m\cdot n+m)=k\cdot (m\cdot n^+)$.
(2) n szerinti indukcióval. A szorzás definíciójából következik, hogy $n\cdot 0=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ esetén, így $n=0$ esetén $0\cdot n=0$ is teljesül.Tegyük fel, hogy $n\in\mathbb{N}$-re $0\cdot n=0$.Ekkor $0\cdot n^+=0\cdot n+0=0$.
(3) n szerinti indukcióval. Nyilván $n\cdot 1=n\cdot 0+n=n$. Az, hogy $1\cdot 0=0$ (2) miatt teljesül.Tegyük fel, hogy $n\in\mathbb{N}$-re $1\cdot n=n$. Ekkor $1\cdot n^+=1\cdot n+1=n+1=n^+$.
(5) n szerinti indukcióval. Ha $n=0$, akkor $k\cdot (m+0)=k\cdot m=k\cdot m+0=k\cdot m+k\cdot 0$. Tegyük fel, hogy igaz $n\in\mathbb{N}$-re. Ekkor $k\cdot (m+n^+)=k\cdot (m+n)^+=k\cdot (m+n)+k=(k\cdot m+k\cdot n)+k=k\cdot m+(k\cdot n+k)=k\cdot m+k\cdot n^+$.

19. Fogalmazza meg a természetes számok szorzás alaptulajdonságait kimondó tételt, és bizonyítsa be a kommutativitást.

Állítás:

Ha $k,m,n \in \mathbb{N}$, akkor

1. $(k\cdot m)\cdot n=k\cdot (m\cdot n)$ (asszociativitás)
2. $0\cdot n=n\cdot 0=0$
3. $1\cdot n=n\cdot 1=n$ (az 1 egységelem)
4. $m\cdot n=n\cdot m$ (kommutativitás)
5. $k\cdot (m+n)=k\cdot m+k\cdot n$ (disztributivitás)

Bizonyítás:

5. Először bebizonyítjuk, hogy $m^+\cdot n=m\cdot n+n$ minden $n \in \mathbb{N}$-reindukcióval bizonyítva az $n=0$ eset $m^+\cdot 0=0=m\cdot 0+0$ miatt nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbb{N}$-re igaz az állítás. Ekkor $m^+\cdot n^+=m^+\cdot n+m^+=(m\cdot n+n)+m^+=((m\cdot n+n)+m)^+=((m\cdot n+m)+n)^+=(m\cdot n^++n)^+=m\cdot n^+ + n^+$. Az $m\cdot n=n\cdot m$ kommutativitás bizonyítása n szerinti indukcióval történik. Az $n=0$ eset (2) miatt teljesül. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$-re az állítás igaz. Ekkor $m\cdot n^+=m\cdot n+m=n\cdot m+m=n^+\cdot m$.

20. Bizonyítsa be, hogy a természetes számok halmaza a $\leq$ relációval rendezett.

Állítás:

A természetes számok halmaza a $\leq$ relációval rendezett.

Bizonyítás:

Nyilvánvaló, hogy $\leq$ reflexív és tranzitív. Megmutatjuk, hogy antiszimmetrikus. Ha $m\leq n$ és $n\leq m$, akkor $n=m+x$ és $m=n+y$ valamely $x,y\in \mathbb{N}$-re. De ebből $n+0=n=m+x=(n+y)+x=n+(y+x)$. Az egyszerűsítési szabály szerint $y+x=0$. Ha $x\neq 0$, az összeg definíciója szerint rákövetkezője valaminek, így nem lehet 0. Tehát $x=0$. Innen $m=n$.

Meg kell még mutatnunk, $\mathbb{N}$ bármely két eleme összehasonlítható. Jelölje $S(n)$ azon elemek halmazát, amelyek egy adott $n\in \mathbb{N}$-nel összehasonlíthatók, S pedig azon $n\in \mathbb{N}$-ek halmazát, amelyekre $S(n)=\mathbb{N}$. Azt kell megmutatnunk, hogy $S=\mathbb{N}$. Először megmutatjuk, hogy $S(0)=\mathbb{N}$, azaz $0\in S$. Valóban $m=0+m$, így $0\leq m$ $\forall m\in \mathbb{N}$-re. most feltéve, hogy $S(n)=\mathbb{N}$ megmutatjuk, hogy $S(n^+)=\mathbb{N}$. Legyen $m\in \mathbb{N}$, ha $m\leq n$, akkor $n=m+k$, így $n^+=m+k^+$, tehát $m\leq n^+$, azaz $m\in S(n^+)$. Ha $m>n$, akkor $m=n+k$ valamely $k\in \mathbb{N}$-re, amelyere $k\neq 0$. Ha $k=j^+$, akkor $m=n+k=n+j^+=n^++j$, így $m\geq n^+$. Ezzel beláttuk, hogy $S(n^+)=\mathbb{N}$, így ha $n\in S$, akkor $n^+\in S$. Teljes kapjuk, hogy $S=\mathbb{N}$.

21. Fogalmazza meg és bizonyítsa be a természetes számokra a $\leq$ és a műveletek kapcsolatát leíró tételt.

Állítás:

Ha $m,n\in \mathbb{N}$, akkor azt mondjuk, hogy $m\leq n$, ha van olyan k természetes szám, hogy $m+k=n$ Legyen $k,m,n\in \mathbb{N}$. Ekkor

1. n^+ közvetlenül követi n-et;
2. $m\leq n$ akkor és csak akkor, ha $m+k\leq n+k$;
3. $k\neq 0$ esetén $m\leq n$ akkor és csak akkor, ha $m\cdot k\leq n\cdot k$;
4. $m<n$ akkor és csak akkor, ha $m+k<n+k$;
5. $k\neq 0$ esetén $m<n$ akkor és csak akkor, ha $m\cdot k<n\cdot k$;
6. ha $m\cdot k=n\cdot k$ és $k\neq 0$ makkor $m=n$ (egyszerűsítési szabály vagy törlési szabály $k\neq 0$-ra).

Bizonyítás:

22. Bizonyítsa be, hogy a természetes számok halmaza a $\leq$ relációval jólrendezett. Azt, hogy rendezett, nem kell bizonyítania.

Állítás:

A természetes számok halmaza a $\leq$ relációval jólrendezett.

Bizonyítás:

Legyen $A \subset \mathbb{N}$ nem üres halmaz. Legyen $B=\{m \in \mathbb{N}: m \leq n$ minden $n \in A$-ra$\}$. Nyilván $0 \in B$. Ha $n \in A$, akkor $n^+ \notin B$. Tehát van olyan $m \in B$, amelyre $m^+ \notin B$, mert egyébként teljes indukcióval azt kapnánk, hogy $B=\mathbb{N}$. Megmutatjuk, hogy m az A legkisebb eleme. Az világos, hogy alsó korlát, csak azt kell belátnunk, hogy $m \in A$. Ha $m \notin A$ teljesülne, akkor minden $n \in A$-ra $m<n$ lenne, amiből $m^+ \leq n$ következne, mert m^+ közvetlenül követi m-et, ez azonban ellentmondás.

23. Fogalmazza meg és bizonyítsa be a logikai függvények normál alakjára vonatkozó tételt.

Állítás:

Bizonyítás:

24. Fogalmazza meg és bizonyítsa be a maradékos osztás tételét.

Állítás:

Legyen $n>0$ természetes szám. Minden m természetes szám egyértelműen felírható $m=qn+r$ alakban, ahol $q,r \in \mathbb{N}$ és $r<n$.

Bizonyítás:

Mivel $kn \geq k$, van olyan k, amelyre $kn>m$, például $k=m^+$. Legyen k a legkisebb természetes szám, amelyre $kn>m$. Nyilván $k \neq 0$, így $k=q^+$ valamely $q \in \mathbb{N}$-re. Mivel $qn \leq m$, van olyan r természetes szám, amelyre $m=qn+r$. Ha $r \geq n$ lenne, akkor $m \geq qn+n=kn>m$ adódna. Az egyértelműség bizonyításához tegyük fel, hogy $m=q'n+r'$, ahol $r'<n$. Ha például $q'>q$, akkor $m=q'n+r' \geq q'n \geq (q+1)n>qn+r=m$, ellentmondás, és hasonlóan $q'<1$ is ellentmondásra vezet. Így $q=q'$, amiből már $r=r'$ következik.

25. Fogalmazza meg és bizonyítsa be a számrendszerekre vonatkozó tételt.

Állítás:

Legyen $q>1$ természetes szám. Minden $m>0$ természetes számhoz egy és csak egy olyan n természetes szám és $a_0,a_1,...a_n \in [0,q[\subset \mathbb{N}$ sorozat létezik, amelyre $a_n \neq 0$ és $m=\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot q^i$.

Bizonyítás:

Indukcióval bizonyítunk: feltesszük, hogy $0<m'<m$ esetén igaz az állítás, és bebizonyítjuk, hogy m-re is. Ebből következik, hogy az állítás minden pozitív természetes számra teljesül. Osszuk maradékosan m-et q-val, azaz írjuk fel $m=m'+r$ alakban, ahol $m',r \in \mathbb{N}$ és $r<q$. Ha $m'=0$, akkor $n=0$, $a_0=r$ választással készen is vagyunk (az egyértelműség a maradékos osztás egyértelműségéből következik). Ha $m' \neq 0$, akkor $m'<m$, és az indukciós feltevés szerint egyértelműen felírható $m'=a^1+a^2q+...+a^{n+1}q^n$ alakban. Ebből és a maradékos osztás egyértelműségéből következik az állítás.

26. Definiálja az egész számokat az összeadással és bizonyítsa be a megfelelő tételt.

Állítás:

Tekintsük $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-en az $(m,n)\sim(m',n')$, ha $m+n'=m'+n$ relációt, az $(m,n)+(m',n')=(m+m',n+n')$ összeadást. A $\sim$ reláció ekvivalenciareláció. Az ekvivalenciaosztályok halmazát $\mathbb{Z}$-vel fogjuk jelölni, és elemeit egész számoknak nevezzük. Az összeadás kompatibilis az ekvivalenciával, így az egész számok között értelmezve van az összeadás.

Bizonyítás:

Az összeadás tulajdonságait használjuk fel a bizonyításhoz. A $\sim$ reláció ekvivalenciareláció. Megmutatjuk, hogy a párok összeadása komptaibilis az ekvivalenciarelációval. Mivel a párok összeadása kommutatív, elég azt megmutatni, hogy ha $(m,n)\sim(m',n')$, akkor $(m,n)+(m'',n'')\sim(m',n')+(m'',n'')$. Az, hogy $(m,n)\sim(m',n')$, azt jelenti, hogy $m+n'=m'+n$. Ebből $m+m''+n'+n''=n+n''+m'+m''$, ami viszont azt jelenti, hogy $(m,n)+(m'',n'')=(m+m'',n+n'')\sim(m'+m'',n'+n'')=(m',n')+(m'',n'')$.

27. Fogalmazza meg az egész számok rendezésének tulajdonságait leíró tételt, és bizonyítsa be.

Állítás:

1. ha $x,y,z\in\mathbb{Z}$ és $x\leq y$, akkor $x+z\leq y+z$ (az összeadás monoton);
2. ha $x,y\in\mathbb{Z}$ és $x,y\geq 0$, akkor $x\cdot y\geq 0$ (a szorzás monoton);

Bizonyítás:

28. Fogalmazza meg az egész számok szorzásának tulajdonságait leíró tételt, és bizonyítsa be.

Állítás:

Bizonyítás:

29. Fogalmazza meg gyűrűben a nullával való szorzás tulajdonságait, és az előjelszabályt, és bizonyítsa be őket.

Állítás:

1. Tetszőleges gyűrűben $x0=x(0+0)=x0+x0$. Mindkét oldalhoz hozzáadva $-x0$-t, kapjuk, hogy $x0=0$. Hasonlóan adódik, hogy $0x=0$.
2. $(-x)y=x(-y)=-xy$ és $(-x)(-y)=xy$ minden x,y elemre.

Bizonyítás:

30. Fogalmazza meg gyűrűben az egész együtthatóval való szorzás tulajdonságait.

Állítás:

Bizonyítás:

31. Fogalmazza meg az általános disztributivitás tételét, és bizonyítsa be.

Állítás:

Egy R gyűrűben

1. ha $m,n\in\mathbb{N}$, valamint $a_1,a_2,\ldots,a_m$ és $b_1,b_2,\ldots,b_n$ a gyűrű tetszőleges elemei, akkor $(\sum_{i=1}^{m} a_i)(\sum_{j=1}^{n} b_j)=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_i b_j)$;

2. ha $m \in \mathbb{N}^+$, $n_1,...n_m \in \mathbb{N}$, valamint $a_{i,j_i} \in R$, ha $1 \le i \le m$, $1 \le j_i \le n_i$, akkor $\prod_{i=0}^{m} (\sum_{j_i=1}^{n_i} a_{(i,j_i)}) = \sum_{j_i=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \prod_{i=1}^{m} a_{(i,j_i)}$;

Bizonyítás:

(1) triviális, ha m=0 vagy n=0. Az n=1 eset m szerinti teljes indukcióval következik a job oldali disztributivitásból. Végül az általános esetet n szerinti teljes indukcióval kapjuk:

$$(\sum_{i=1}^{m} a_i)(\sum_{j=1}^{a} b_j) = (\sum_{i=1}^{m} a_i)(\sum_{j=1}^{n-1} b_j + b_n) = (\sum_{i=1}^{m} a_i)(\sum_{j=1}^{n-1} b_j) + (\sum_{i=1}^{m} a_i) b_n = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-1} a_i b_j + \sum_{i=1}^{m} a_i b_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j .$$

(2) triviális, ha m=1 és (1)-el ekvivalens, ha m=2. Az általános esetet (1) felhasználásával m szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk:

$$\prod_{i=1}^{m} (\sum_{j_i=1}^{n_i} a_{i,j_i}) = \prod_{i=1}^{m-1} (\sum_{j_i=1}^{n_i} a_{i,j_i}) \cdot (\sum_{j_m=1}^{n_m} a_{i,j_m}) = (\sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_{m-1}=1}^{n_{m-1}} \prod_{i=1}^{m-1} a_{i,j_i}) \cdot (\sum_{j_m=1}^{n_m} a_{i,j_m}) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \dots \sum_{j_m=1}^{n_m} \prod_{i=1}^{m} a_{i,j_i} .$$

32. Definiálja a bal és jobb oldali nullosztó és nullosztópár fogalmát. Adjon meg két lényegesen különböző, nullosztókkal kapcsolatos állítást, és bizonyítsa be őket.

Állítás:

Ha x,y egy R gyűrű nullától különböző elemei, és xy=0, akkor azt mondjuk, hogy x és y egy nullosztópár, x bal oldali nullosztó, y pedig jobb oldali nullosztó. (Egy legalább kételemû gyûrût nullosztómentesnek nevezünk, ha nincsenek benne nullosztópárok.)

(1) Nullosztómentes gyűrűben nem nulla elemmel való szorzásnál lehet balról is, jobbról is egyszerüsíteni.

(2) Ha a gyűrűben van a nullától különbözõ egységelem, és x-nek van multiplikatív inverze, akkor x nem lehet sem bal, sem jobb oldali nullosztó.

Bizonyítás:

(1) Ha xy=xz és $x \neq 0$. akkor x(y-z)=0, így y-z=0, tehát y=z. Hasonlóan adódik, hogy ha yx=zx és $x \neq 0$, akkor y=z A megfordítás nyilvánvaló, ha van nullosztópár, akkor a bal oldali nullosztóval balról, a jobb oldali nullosztóval pedig jobbról nem lehet egyszerûsíteni.

(2) Mivel xy=0-ból illetve xy=0-ból $x^{-1}xy=y=0$ illetve $yxx^{-1}=y=0$ következik.

33. Fogalmazzon meg szükséges és elégséges feltételt arra vonatkozóan, hogy egy integritási tartomány rendezett integritási tartomány legyen, és bizonyítsa be az állítást.

Állítás:

(Segéd def.: Definiálja a rendezett integritási tartomány fogalmát. Az R-et rendezett integritási tartománynak nevezzük, ha rendezett halmaz, integritási tartomány, és

(1) ha $x,y,z \in R$ és $x \le y$, akkor $x+z \le y+z$ (az összeadás monoton);

(2) ha $x,y \in R$ és $x,y \ge 0$, akkor $x \cdot y \ge 0$ (a szorzás monoton).)

Egy rendezett halmaz, amely integritási tartomány, akkor és csak akkor rendezett integritási tartomány, ha az alábbi feltételek fennállnak:

1. ha $x,y,z \in R$ és $x<y$, akkor $x+z<y+z$ (az összeadás szigorúan monoton);
2. ha $x,y \in R$ és $x,y>0$, akkor $x \cdot y>0$ (a szorzás szigorúan monoton).

Bizonyítás:

Ha a definícióból (1) teljesül, x<y, akkor $x \le y$ és így $x+z \le y+z$. Egyenlőség nem teljesülhet, mert akkor x=x+z-z=y+z-z=y következne, így kapjuk (1)-t. (1)-ből nyilván következik (1), mert az egyenlõség esete triviális. Ha a definícióból (2) teljesül és x,y>0, akkor $x,y \ge 0$, így $xy \ge 0$. Ha xy=0 lenne, akkor x és y egy nullosztópár lenne, ami lehetetlen, így kapjuk (2)-t. (2)-ből nyilván következik (2), mert gyűrűben x0=0y=0.

34. Fogalmazza meg a rendezett integritási tartományban az egyenlőtlenségekkel való számolás szabályait leíró tételt és bizonyítsa be.

<u>Állítás:</u>

Legyen R rendezett integritási tartomány. Ekkor

1. ha $x>0$, akkor $-x<0$, és ha $x<0$, akkor $-x>0$;
2. ha $x<y$ és $z>0$, akkor $xz<yz$;
3. ha $x<y$ és $z<0$, akkor $xz>yz$;
4. ha $x\neq 0$, akkor $x^2>0$; speciálisan, ha van egységelem, akkor az pozitív;
5. ha 1 az egységelem, $0<x<y$, és x-nek is, y-nak is van multiplikatív inverze, akkor $0<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$.

<u>Bizonyítás:</u>

(1) Ha $x>0$, akkor $0=-x+x>-x+0=-x$. Ha $x<0$, akkor $0=-x+x<-x+0=-x$.

(2) Abból következik, hogy $y-x>y-y=0$, így $(y-x)z>0$, amiből $yz=(x-y)z+xz>0+xz=xz$.

(3) Megkapjuk (1)-ből és (2)-ből, mert $-1((y-x)z)=(y-x)(-z)>0$, így $(y-x)z<0$, tehát $yz<xz$.

(4) Ha $x>0$, akkor $x^2>0$, ha viszont $x<0$, akkor $-1x>0$, így $x^2=(-x)^2>0$. Speciálisan, $1^2=1>0$.

(5) Ha $y>0$ és $v\leq 0$, akkor $yv\leq 0$. De $y(\frac{1}{y})=1>0$. Ezért $\frac{1}{y}>0$, és hasonlóan $\frac{1}{x}>0$. Ha $x<y$ egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk a pozitív $(\frac{1}{x})(\frac{1}{y})$ mennyiséggel, akkor azt kapjuk, hogy $\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$.

35. Definiálja a racionális számok halmazát az összeadással. bizonyítsa be. hogy az összeadás kompatibilis az osztályozással és az összeadással a racionális számok halmaza Abel-csoport.

<u>Állítás:</u>

Tekintsük $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$-n az (m,n)~(m',n'), ha mn'=nm' relációt, és az (m,n)+(m',n')=(mn'+nm',nn') összeadást. A ~ reláció ekvivalenciareláció. Az ekvivalenciaosztályok halmazát $\mathbb{Q}$-val fogjuk jelölni, és elemeit racionális számoknak nevezzük. Az összeadás kompatibilis az ekvivalenciával, így a racionális számok között értelmezve van az összeadás, továbbá a racionális számok halmaza az összeadással Abel-csoport.

<u>Bizonyítás:</u>

Az összeadás kompatibilis az osztályozással, mert ha (m,n)~(m',n'), akkor mn'=nm', amiből mn`n'`n'`=nm'n"n``, innen viszont (mn'`+nm'`)n`n'`=mn`n'`n'`+nn`m'`n'`=nm`n'`n'`+nn`m'`n'`=(m`n'`+n`m'`)nn", tehát (m,n)+(m'`,n'`)=(mn'`+nm'`,nn'`)~(m`n'`+n`m'`,n`n'`)=(m`,n`)+(m'`,n'`), és a párok összeadása kommutatív, így ezt elég belátni. Mivel a párok összeadása kommutatív és –mint könnyen kiszámolható – asszociatív, az ekvivalenciaosztályok összeadása is kommutatív és asszociatív. A (0,1) pár osztálya nullelem, ezt jelöljük nullával. Az (m,n) pár osztályának additív inverze a (-m,n) pár osztálya. Így $\mathbb{Q}$ az összeadással Abel-csoport.

36. Definiálja a racionális számok halmazát a műveletekkel. bizonyítsa be, hogy a szorzás kompatibilis az osztályozással, és felhasználva hogy az összeadással a racionális számok halmaza Abel-csoport, bizonyítsa be, hogy test.

<u>Állítás:</u>

1. Tekintsük $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$-ből az (m,n)~(m',n'), ha mn'=nm' relációt, az (m,n)+(m',n')=(mn'+nm',nn') összeadást és az $(m,n)\cdot(m',n')=(m\cdot m',n\cdot n')$ szorzást. A ~ reláció ekvivalenciareláció. Az ekvivalenciaosztályok halmazát $\mathbb{Q}$-val fogjuk jelölni, és elemeit racionális számoknak nevezzük. Az összeadás, és a szorzás kompatibilis az ekvivalenciával, így a racionális számok között értelmezve van az összeadás, és a szorzás.

2. A racionális számok halmaza testet alkot.

Bizonyítás:

(1) A szorzás kompatibilis az osztályozással, mert ha (m,n)~(m',n'), akkor mn'=nm', amiből mm''n`n''=nm'm''n``, így $(m,n)\cdot(m'',n'')=(m\cdot m'',n\cdot n'')\sim(m`\cdot m'',n`\cdot n'')=(m`,n`)\cdot(m'',n'')$. Mivel a párok szorzása kommutatív, a szorzás kompatibilitását az osztályozással beláttuk.

(2) Gyűrű: Egy R halmazt egy $(+,\cdot)$ binér műveletekből álló párral gyűrűnek nevezünk, ha az összeadással Abel-csoport (a nullelemet 0 fogja jelölni), a szorzással félcsoport, és teljesül mindkét oldali disztributivitás.

Test: Egy F gyűrűt ferdetestnek nevezünk, ha a nullelemet 0-val jelölve F\{0} a szorzással csoport. Ha a szorzás kommutatív, akkor a ferdetestet testnek nevezzük.

Kommutatív nullosztómentes gyűrűt integritási tartománynak nevezünk.

Tehát ha belátjuk, hogy: $\mathbb{Q}$ gyűrű, és $\mathbb{Q}$ nem nulla elemei a szorzással Abel-csoportot alkotnak, akkor beláttuk, hogy ferdetest. Mivel Abel-csoportban, a szorzás kommutatív, ezzel bizonyítjuk, hogy $\mathbb{Q}$ test.

Mivel a racionális számok halmaza az összeadással Abel-csoport, azt kell hogy belássuk, hogy a szorzással félcsoport. Ekkor

Mivel a párok szorzása kommutatív és asszociatív, az osztályoké is. Egyszerű számolás mutatja, hogy $(m,n)\cdot((m`n`)+(m''n''))$ és $(m,n)\cdot(m`n`)+(m,n)\cdot(m''m'')$ ekvivalens párok, így az osztályok szorzása asszociatív. Ezzel beláttuk, hogy $\mathbb{Q}$ kommutatív gyűrű. A gyűrű definíciója szerint $\mathbb{Q}$ a szorzással csoport, és mivel beláttuk, hogy kommutatív gyűrű ezért test is.

37. Definiálja a racionális számok halmazát a műveletekkel és a rendezéssel, és felhasználva, hogy test, bizonyítsa be a rendezés tulajdonságait, beleértve, hogy kompatibilis az osztályozással.

Állítás:

Tekintsük $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$-n az (m,n)~(m',n'), ha mn'=nm' relációt, az (m,n)+(m',n')=(mn'+nm',nn') összeadást és az $(m,n)\cdot(m',n')=(m\cdot m',n\cdot n')$ szorzást, valamint az $(m,n)\leq(m',n')$, ha $(m'n-n'm)nn'\geq0$ relációt. A ~ reláció ekvivalenciareláció. Az ekvivalenciaosztályok halmazát $\mathbb{Q}$-val fogjuk jelölni, és elemeit racionális számoknak nevezzük. Az összeadás, a szorzás és a $\leq$ reláció kompatibilis az ekvivalenciával, így a racionális számok között értelmezve van az összeadás, a szorzás és a $\leq$ reláció, amely rendezés, továbbá

(1) ha $x,y,z\in\mathbb{Q}$ és $x\leq y$, akkor $x+z\leq y+z$ (az összeadás monoton);

(2) ha $x,y\in\mathbb{Q}$ és $x,y\geq0$, akkor $x\cdot y\geq0$ (a szorzás monoton.)

(3) A rendezés kompatibilis az osztályozással

Bizonyítás:

Ha $(m,n)\leq(m'',n'')$ és (m,n)~(m`,n`), akkor $(m`,n`)\leq(m'',n'')$. Először is vegyük észre, hogy $(0,1)\leq(m,n)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $mn\geq0$. Ha most (m,n)~(m`,n`), azaz mn`=nm', akkor m=0 szerint n>0, így m`n`=0, azaz $(0,1)\leq(m`,n`)$. Ha m>0, akkor az előző tétel szerint n>0. Ha mn`>0, akkor ebből n`>0 és m`>0 következik, így m`n`>0, amiből $(0,1)\leq(m`,n`)$. A további esetek vizsgálata hasonló. Most vegyük észre, hogy $(m,n)\leq(m'',n'')$ azzal ekvivalens, hogy $(0,1)\leq(m'',n'')+(-m,n)$. Mivel az eddig bebizonyítottak szerint a jobb oldalon (m`,n`)~(m'',n'') esetén (m'',n'') helyére (m`,n`)-t írva, vagy (m`,n`)~(m,n) esetén (-m,n) helyére (-m',n')-t írva, az összeg ekvivalens összegbe megy át, kapjuk, hogy $\leq$ reláció kompatibilis az osztályozással. Az, hogy $\leq$ rendezés az osztályon, valamint (1) és (2) is adódik innen.

38. Van-e olyan racionális szám, amelynek a négyzete 2? Bizonyítsa be állítását.

Állítás:

Nincs olyan racionális szám amelynek a négyzete 2.

Bizonyítás:

Ha lenne, akkor lenne olyan is, amely felírható $\frac{m}{n}$ alakban, ahol $m,n \in \mathbb{N}^+$. Válasszuk azt a felírást, amelyre a számláló minimális. Mivel $m^2=2n^2$, m páros kell legyen. Legyen $m=2k$, $k \in \mathbb{N}^+$. Ekkor $4k^2=2n^2$, ahonnan $2k^2=n^2$. Innen n is páros. Ez ellentmond annak, hogy a számláló minimális.

39. Fogalmazza meg az Archimédészi tulajdonságot. Mi a kapcsolata a felső határ tulajdonsággal? Bizonyítsa be állítását.

Állítás:

Egy F rendezett testet archimédészi tulajdonságúnak nevezünk, ha $x,y \in F$, $x>0$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $nx \geq y$. Egy felső határ tulajdonságú test mindig archimédészi tulajdonságú is.(Felső határ tulajdonság: Egy F rendezett testet felső határ tulajdonságúnak nevezünk, ha minden nem üres felülről korlátos részhalmazának létezik legkissebb felső korlátja.)

Bizonyítás:

Egy felső határ tulajdonságú test mindig archimédészi tulajdonságú is, ellenkező esetben ugyanis $A=\{nx : n \in \mathbb{N}\}$-nek az y felső korlátja lenne. Legyen z=sup A. Mivel $z-x<z$, a $z-x$ már nem felső korlát, így van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $nx>z-x$. De ebből $(n+1)x>z$. Ez ellentmondás.

40. Bizonyítsa be, hogy a racionális számok rendezett teste nem felső határ tulajdonságú.

Állítás:

A racionális számok rendezett teste nem felső határ tulajdonságú.

Bizonyítás:

Legyen A az összes olyan $r>0$ racionális számok halmaza, amelyekre $r^2<2$, és legyen B az összes olyan $r>0$ racionális számok halmaza, amelyekre $r^2>2$. Legyen $s=r-\frac{r^2-2}{r+2}=\frac{2r+2}{r+2}$. Ekkor $s^2-2=\frac{2(r^2-2)}{(r+2)^2}$. Ha $r \in A$, akkor $s>r$, de $s^2<2$, így A-nak nincs legnagyobb eleme. Ha $r \in B$, akkor $s<r$, de $s^2>2$, így B-nek nincs legkissebb eleme. Innen következik, hogy A-nak nincs legkissebb felső korlátja: ha lenne, nem lehetne A-ban, mert akkor A legnagyobb eleme lenne, így B-ben kellene lennie, de B-nek nincs legkissebb eleme.

41. Bizonyítsa be, hogy a racionális számok rendezett teste Archimédészi tulajdonságú.

Állítás:

A racionális számok rendezett teste Archimédeszi tulajdonságú.

Bizonyítás:

Legyen $x>0$. Ha $y \leq 0$, akkor $n=0$ választással, ha pedig $x=\frac{i}{j}$, $y=\frac{k}{m}$, $i,j,k,m \in \mathbb{N}^+$, akkor $n \geq kj$ választással $nx \geq y$, így kapjuk, hogy $\mathbb{Q}$ archimédeszi tulajdonságú.

42. Definiálja a komplex számok halmazát a műveletekkel és bizonyítsa be, hogy test.

Állítás:

Bizonyítás:

43. Fogalmazza meg a komplex számok abszolút értékének tulajdonságait és bizonyítsa be.

Állítás:

Ha $z,w\in\mathbb{C}$, akkor:

(1) $z\bar{z}=|z|^2$;

(2) $|0|=0$;

(3) $z\neq 0$ esetén $|z|>0$;

(4) $|\bar{z}|=|z|$;

(5) $|zw|=|z||w|$;

(6) Teljesülnek a háromszög-egyenlőtlenségek: $|z+w|\leq|z|+|w|$;

(7) $|\Re(z)|\leq|z|$, $|\Im(z)|\leq|z|$;

(8) $|z|\leq|\Re(z)|+|\Im(z)|$.

Bizonyítás: