Minta zárthelyi dolgozat
Idő: 60 perc
Bevezetés a matematikába, 2007/2008, I. félév, 1. zh.

1. Az embereket tekintve, jelölje $J(x)$, $B(x)$, $U(x)$, $I(x)$, $E(x)$, $P(x)$, $K(x)$, $N(x)$, $H(x,y)$ illetve $T(x,y)$ rendre azt, hogy x jogász, bíró, ügyeskedő, idős, életerős, politikus, képviselő, nő, illetve hogy x házastársa y-nak valamint hogy x tiszteli y-t. Formalizáljuk az alábbi állításokat:
   (1) csak bírók tisztelnek bírókat;
   (2) minden bíró csak bírókat tisztel;
   (3) minden nős képviselő életerős;
   (4) azok a jogászok, akiknek életerős feleségük van, mind képviselők.

2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B halmazokra
   (1) $A = B$ pontosan akkor, ha $\wp(A) = \wp(B)$;
   (2) $\wp(A) \cap \wp(B) = \wp(A \cap B)$;
   (3) $\wp(A) \cup \wp(B) \subset \wp(A \cup B)$.

3. Tekintsük az $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ halmazon az osztója részbenrendezést. A megfelelő szigorú relációt írjuk fel párok halmazaként. Határozzuk meg a legkisebb, legnagyobb, maximális és minimális elemeket, ha vannak. Adjuk meg a $[3, 6]$ intervallum elemeit, felső és alsó korlátjait, legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátját, ha van. szuprémumot.

4. Mutassuk meg, hogy bármely f függvényre és B halmazra $f\big(f^{-1}(B)\big) = B \cap \operatorname{rng}(f)$. Mutassuk meg, hogy az állítás nem marad érvényben, ha f csak reláció.

5. Igazoljuk, hogy $3^n > 2^n + 7n$, ha $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$.

6. Vizsgáljuk meg, teljesül-e az asszociativitás, kommmutativitás, egységelem létezése, illetve inverz elem létezése az $(\mathbb{N}, \star)$ párra ahol $x \star y = xy + x + y$.

7. Mutassuk meg, hogy a $\{m/3^n : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^+\}$ halmaz rendezett integritási tartomány a szokásos összeadással, szorzással és rendezéssel. Mely elemeknek van (multiplikatív) inverze?