Diszkrét matematika I. feladatok

1. Teljes indukció

1.1. Könnyebb

Teljes indukcióval bizonyítsd be az alábbi összefüggéseket:

1. $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
4. $1\cdot 2\cdots m+2\cdot 3\cdots(m+1)+\cdots+n(n+1)\cdots(n+m-1)=\dfrac{n(n+1)\cdots(n+m)}{m+1}$.
5. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.
6. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}=\dfrac{n-1}{n}$.
7. $2^0+2^1+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$.

Adj zárt formulát a következő összegekre:

8. $1+3+5+\cdots+(2n-1)$.
9. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$.
10. $1^2-2^2+3^2\cdots+(-1)^{n-1}n^2$.

1.2. Nehezebb

Adj zárt formulát a következő összegre:

1. $1^4+2^4+\cdots+n^4$.

2. Halmazok

2.1. Könnyebb

1. Milyen összefüggés van az alábbi három halmaz között?
   $\mathbf{N}=\{$természetes számok$\}$
   $\mathbf{N'}=\{$a természetes számok halmaza$\}$
   $\mathbf{N''}=\{\mathbf{N}\}$
2. Az A halmazt definiáljuk a következő módon: $A=\{$1978-ban Budapesten született ikerpárok$\}$.
   Kati és Jancsi ikrek, akik 1978-ban születtek Budapesten. Igaz-e, hogy
   a) Jancsi $\in A$; **b)** $\{$Kati, Jancsi$\}\in A$; **c)** $\{$Kati, Jancsi$\}\subseteq A$; **d)** $\{($Kati, Jancsi$)\}\subseteq A$?
3. Igaz-e, hogy $\emptyset=\{\emptyset\}$?
4. Legyenek x és y halmazok. Az alábbi halmazok közül melyekre igaz, hogy x eleme, x részhalmaza, x se nem eleme, se nem részhalmaza: $\{\{x\},y\}, x, \emptyset\cap x, \{x\}\setminus\{\{x\}\}, \{x\}\cup x, \{x\}\cup\{\emptyset\}$.

5. Keressünk olyan A, B, C halmazokat, melyekre
   $A \cap B \neq \emptyset, \qquad A \cap C = \emptyset, \qquad (A \cap B) \setminus C = \emptyset.$

6. Legyen $A = \{p(x) \text{ polinom gyökei}\}$, $B = \{q(x) \text{ polinom gyökei}\}$ és $r(x) = p(x)q(x)$. Hogyan fejezhetjük ki az $r(x)$ polinom gyökeit A-val és B-vel?

7. Melyik az az $s(x)$ polinom, melynek gyökei D halmazára $D = A \cap B$, ahol A és B az előző feladatban szereplő halmazok?

8. Állapítsd meg, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak tetszőleges A, B, C halmazokra:
   $(A \cup B) \setminus A = B; \qquad (A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C); \qquad (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C).$

9. Bizonyítsd be, hogy $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B} \cup C$.

10. Igazoljuk, hogy $A \triangle \emptyset = A, \qquad A \triangle A = \emptyset, \qquad A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C, \qquad A \triangle (A \triangle B) = B.$

11. Fejezzük ki a $\triangle$ és $\cap$ segítségével a következőket: $A \cup B$ és $A \setminus B$.

12. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést: $(A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C)) \cap (A \cup B \cup C)$.

13. Bizonyítsuk be, hogy
    a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; **b)** $A \setminus B = A \cap \overline{B}$; **c)** $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; **d)** $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

14. Bizonyítsd be a következő összefüggést: $\overline{(\overline{A \cap B \cup C}) \cap \overline{A}} \cup \overline{B} \cup \overline{C} = A \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

2.2. Nehezebb

1. Bizonyítsd be, hogy ha $A_1, \dots A_n$ halmazok, akkor x pontosan akkor eleme az $A_1 \triangle \cdots \triangle A_n$ halmaznak, ha x az $A_1, \dots A_n$ halmazok közül páratlan soknak eleme.

3. Relációk, függvények

3.1. Fogalmak

Rendezett pár Az (x, y) *rendezett pár* fogalmát úgy szeretnénk definiálni, hogy $(x, y) = (u, v)$ akkor és csak akkor teljesüljön, ha $x = u$ és $y = v$. (ezt formálisan így jelöljük: $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$). Az (x, y) rendezett pár első koordinátája x, a második y.

Descartes-szorzat Az X, Y halmazok *Descartes-szorzat*án az alábbi halmazt értjük:
$X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.

Binér relációk Egy halmazt *binér reláció*nak nevezünk (vagy kétváltozós relációnak), ha minden eleme rendezett pár. Ha R egy binér reláció, akkor $(x, y) \in R$ helyett gyakran ezt írjuk: xRy, szavakkal x és y között fennáll az R reláció.

Legyen most $X = Y$, valamint R egy binér reláció $X \times X$-en. Azt mondjuk, hogy R
-*tranzitív*, ha minden x, y, z-re xRy és yRz esetén xRz teljesül (pl. $<, \leq$);
-*szimmetrikus*, ha minden x, y-ra xRy esetén yRx teljesül (pl. $\leq$);
-*antiszimmetrikus*, ha minden x, y-ra xRy és yRx esetén $x = y$ (pl. $\leq$);
-*reflexív*, ha minden x-re xRx teljesül (pl. $=$);
-*trichotom*, ha minden x, y esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül (pl. $<$).
R *részben rendezés*, ha tranzitív, antiszimmetrikus és reflexív.

Függvény A *függvény* (vagy leképezés) egy olyan f reláció, melyre, ha $(x, y) \in f$ és $(x, y') \in f$, akkor $y = y'$. Magyarul minden x-hez legfeljebb egy olyan y létezik, melyre $(x, y) \in f$. Az y elemet az f függvény x helyen felvett értékének nevezzük és a szokásos módon jelöljük: $f(x) = y$ (esetleg $f : x \mapsto y$).

Az f függvényt *injektív*nek (magyarul *kölcsönösen egyértelmű*nek) nevezzük, ha $f(x) = y$ és $f(x') = y$ esetén $x = x'$. Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy különböző elemek képe különböző.

Egy $f : X \mapsto Y$ függvényt *szürjektív*nek nevezünk, ha minden $y \in Y$ elemhez létezik egy $x \in X$, hogy $f(x) = y$, magyarul az egész Y előáll az f képeként.

Ha f injektív és szürjektív is, akkor *bijektív*nek mondjuk.

3.2. Könnyebb

1. Keressünk olyan relációt, amely

   a) reflexív, de nem tranzitív; **b)** antiszimmetrikus és reflexív; **c)** antiszimmetrikus és nem tranzitív; **d)** nem reflexív, nem tranzitív; **e)** reflexív, nem tranzitív, szimmetrikus; **f)** nem tranzitív, de trichotóm; **g)** semmi (nem reflexív, nem tranzitív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem trichotóm).

2. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-en definiáljunk egy $\mathbf{R}$ relációt a következőképpen: $(m_1, n_1)\mathbf{R}(m_2, n_2)$, ha $m_1 \leq m_2$ és $n_1 \leq n_2$. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{R}$ részbenrendezés.

3. Mutassuk meg, hogy az előző feladatban az $\mathbf{R}$ relációval az $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ részben rendezett halmaz minden nemüres részhalmazának van minimális eleme. Hogyan kereshetjük meg?

4. Mutasd meg, hogy ha ϱ és σ szimmetrikus relációk S-en akkor a következők ekvivalensek:
   a) $\varrho \circ \sigma$ szimmetrikus **b)** $\varrho \circ \sigma = \sigma \circ \varrho$

5. Legyen az $\mathbf{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ reláció olyan, hogy $n\mathbf{R}m (n, m \in \mathbb{N})$ igaz, ha n és m közös prímosztóinak a száma páros. Vizsgáljuk meg $\mathbf{R}$ tulajdonságait (ti. fennálnak-e a következők: reflexív, tranzitív, szimmetrikus, antiszimmetrikus, trichotóm).

6. Legyen $\mathbf{R} \subseteq A \times A$: Vizsgáljuk $\mathbf{R}^{-1} \circ \mathbf{R}$ (relációszorzat jelöléssel), illetve $\mathbf{R} \circ \mathbf{R}^{-1}$ (függvényszorzat jelöléssel) tulajdonságait (ti. fennálnak-e a következők: reflexív, szimmetrikus, tranzitív).

7. Legyen $\mathbf{R}$ binér reláció, továbbá $\delta_{\mathbf{R}} = \{x : \text{van } y, \text{ amire } (x, y) \in \mathbf{R}\}$; $\sigma_{\mathbf{R}} = \{y : \text{van } x, \text{ amire } (x, y) \in \mathbf{R}\}$.
   Adjuk meg a $\delta_{\mathbf{R}}, \sigma_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}^{-1}, \mathbf{R} \circ \mathbf{R}, \mathbf{R}^{-1} \circ \mathbf{R}, \mathbf{R} \circ \mathbf{R}^{-1}$ halmazokat, ha
   a) $\mathbf{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N} \text{ és } x \text{ osztója } y\text{-nak}\}$; **b)** $\mathbf{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \text{ és } 2x \geq 3y\}$.

8. Legyenek $f : X \to Y, g : Y \to Z$ leképezések. Mutasd meg, hogy
   a) ha f, g injektív, akkor $f \circ g$ injektív; **b)** ha f, g szürjektív, akkor $f \circ g$ szürjektív; **c)** ha f, g bijektív, akkor $f \circ g$ bijektív.

9. Legyen $A = \{\text{a nem negatív egészek}\}, B = \{\text{páros számok}\}$. Konstruálj bijektív leképezést az A és B halmazok között.

10. Konstruáljunk bijektív leképezést két tetszőleges síkbeli szakasz között.

11. Definiáljunk $\mathbb{Z}$-n két relációt az alábbi módon, és vizsgáljuk $\mathbf{R}_1$ és $\mathbf{R}_2$ tulajdonságait (ti. fennálnak-e a következők: reflexív, tranzitív, szimmetrikus, antiszimmetrikus, trichotóm).
    a) $x\mathbf{R}_1y$, ha $x^2 + y^2$ osztható 2-vel; **b)** $x\mathbf{R}_2y$, ha $x^2 - y^2$ osztható 2-vel.

12. Függvény-e a következő reláció? $\mathbf{R} \subseteq A \times A$, ahol $A = \{$ a síkbeli egyenesek$\}$; $a\mathbf{R}b$, ha a és b egyenesek által bezárt (a kisebb) szög $60°$: Vizsgáljuk a fenti reláció tulajdonságait (ti. fennálnak-e a következők: reflexív, tranzitív, szimmetrikus).

13. Legyen $A = \{$olyan egyenlőszárú háromszögek, amelyeknek az alaphoz tartozó magasságuk egyenlő egy rögzített $m > 0$ számmal$\}$, $B = \{y : y > 0, y \text{ valós}\}$. Definiáljuk az $\mathbf{R} \subseteq A \times B$ relációt a következőképpen: $a\mathbf{R}b, a \in A, b \in B$, ha az a háromszög területe b. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{R}$ függvény, és vizsgáljuk ennek a függvénynek a tulajdonságait (ti. fennálnak-e a következők: szürjektív, injektív, bijektív).

3.3. Nehezebb

1. ...

4. Elemi kombinatorika

4.1. Könnyebb

1. Az összes lehetséges módon kitöltünk TOTÓ-szelvényeket. Hány szelvényt töltöttünk ki?

2. Egy dobozban 10 piros, 20 fehér és 40 zöld golyó van, ezekből húzunk. Hányat kell húznunk ahhoz, hogy
   a) fehér; **b)** 3 különböző színű; **c)** 3 azonos színű; **d)** 5 azonos színű; **e)** 15 azonos színű; **f)** két egymás utáni zöld húzás legyen?

3. Egy futóversenyen 25-en indulnak. Hányféle sorrendben érhetnek célba (ha mondjuk nincs holtverseny és mindenki célbaér)?

4. Hányféleképpen lehet a MISSISSIPPI szó betűit leírni úgy, hogy a négy S betű ne kerüljön egymás mellé?

5. Mekkora az a minimális osztálylétszám, ahol teljesül, hogy
a) van négy diák, aki ugyanabban a hónapban született; **b)** minden hónapban van 3-3 születésnap?

6. Legfeljebb hány természetes szám adható meg úgy, hogy semelyik kettő különbsége ne legyen osztható nyolccal?

7. Hány TOTÓ-t kell kitöltenünk ahhoz, hogy legyen olyan szelvényünk, amin legalább 5 találatunk van?

8. Hány részhalmaza van az $\{1, 2, .., 20\}$ halmaznak? Hány részhalmazára teljesül, hogy
a) az 1 benne van; **b)** 1 és 2 is benne van; **c)** 1, vagy 2 benne van?

9. Hány hatjegyű számra igaz, hogy
a) a szomszédos számjegyei különböznek; **b)** minden jegye különböző; **c)** pontosan egy jegye 0, **d)** van 0 a jegyei között?

10. Hány olyan sorrendje van az $1, 2, \dots, n$ számoknak, melyben az 1 és a 2 nem lehetnek szomszédosak?

11. Az $(a + b)^{22}$ kifejtésében mi az együtthatója az $a^{14}b^8$-nak, valamint az $a^{17}b^5$-nek?

12. Hány út vezet a 3×10-es sakktábla bal alsó sarkából a jobb felsőbe, ha csak fel, jobbra, vagy jobbra-fel átlósan léphetünk?

13. Adott a síkon két párhuzamos egyenes, az egyiken p, a másikon q pont. Hány olyan háromszög van, melynek csúcsai az adott pontok közül valók?

14. Jelöljük C_k^n-val az $x^{n-k}y^k$ együtthatóját az $(x+y)^n$ kifejezésben! Ezen számokból készül a **Pascal-háromszög**. Adjuk össze a Pascal-háromszög n-edik sorának elemeit! Mit kapunk? Adjuk össze a Pascal-háromszög n-edik sorának elemeit most váltakozó előjellel! Most mit kapunk?

15. Mutasd meg, hogy megadható két különböző természetes szám, n és k úgy, hogy $2^n - 2^k$ osztható legyen 711-gyel!

16. Egy bolha ugrál az egyenes egész pontjain jobbra-balra, másodpercenként egyet. Ha az origóból indul és egy percig ugrál, hányféleképpen tud eljutni a +24 pontba?

17. Hányféleképpen lehet felbontani, ha a sorrend számít
a) a 100-at 7 pozitív egész szám összegére; **b)** a 200-at 12 természetes szám összegére; **c)** a 12-t olyan összegre, melyben csak 1 és 2 szerepel?

18. Hány olyan szám van összesen (akárhányjegyű lehet), melyben a számjegyek balról jobbra olvasva **a)** szigorúan monoton növekedve; **b)** szigorúan monoton csökkenve követik egymást?

19. Egy osztály 30 tanulója közül a matekot 12, a matekot és a fizikát 5, a fizikát 14, a matekot és a kémiát 4, a kémiát 13, a fizikát és a kémiát 7, mindhármat 3 szereti. Hányan vannak, akik semelyiket nem kedvelik?

20. Bizonyítsd be, hogy **a)**) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$; **b)** $\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \cdots + \binom{n}{4} = \binom{n+1}{5}$.

21. Egy 25 fős osztályban küldöttséget választanak, mely 6 főből áll, majd ezen hat emberből egy-egy igazgatót és titkárt választanak. Hányféleképpen történhet ez, ha egy ember csak egy tisztséget viselhet?

22. Hozd minél egyszerűbb alakra az alábbi kifejezést: $1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + n\binom{n}{n} =$?

23. Hányféleképpen lehet n darab egyforintos érmét szétosztani k ember között szétosztani? És ha mindenki kap biztosan legalább egy forintot?

24. A cukrászdában ötféle süteményt árulnak: lúdlábat, gesztenyés kockát, dobostortát, minyont és fatörzset. Mindegyikből van még legalább 20. Hányféleképpen ehetünk meg hármat, ha **a**) számít a sorrend, **b**) nem?

25. Hány 100-nál kisebb természetes szám van, mely 2,3 és 5 egyikével sem osztható? És hány olyan 1000-nél kisebb, mely 2,3,5 és 7 egyikével sem osztható?

    Szita formula: adott egy A halmaz és annak n részhalmaza: $A_1, A_2, \dots, A_n$. Ekkor A azon elemeinek száma, melyek egyik A_i-ben sincsenek benne, $|A| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$.

26. Hányféleképpen lehet 100 rekeszben 30 golyót elhelyezni úgy, hogy minden rekeszben, amelyikben van golyó, pontosan 6 darab van és **a)** a golyók egyformák; **b)** a golyók különbözőek, és minden rekeszben figyelembe vesszük a golyók sorrendjét; **c)** a golyók különbözőek, de a rekeszben nem vesszük figyelembe a golyók sorrendjét?

27. Egy 2x12-es sakktábla hányféleképpen fedhető le 2x1-es dominókkal (melyeket vízszintesen és függőlegesen tehetünk le)?

28. Az 52 lapos francia kártyában négy szín mindegyikéből 13-13 darab van, minden színből egy ász van. Négy játékosnak osztunk 13-13 lapot. Hány különböző leosztás van? Hány olyan, amikor mindenkinek van ásza? Hány olyan, amikor minden ász egyvalakinél van?

29. Hányféleképpen lehet sorbarendezni n nullát és k egyest úgy, hogy két egyes ne kerüljön egymás mellé?

30. Artúr király Kerekasztalánál 12 lovag ül. Mindegyikük haragban van a közvetlenül mellette ülőkkel. Öt lovagot kell kiválasztani, akik kiszabadítják a királylányt. Hányféleképpen tehetjük meg ezt úgy, hogy ne legyenek ellenségek a lovagok között? És ha n lovagból kell k-t kiválasztani?

4.2. Nehezebb

1. ...

5. Komplex számok

5.1. Fogalmak

Új jel: i, amire igaz: $i^2 = -1$.

Minden z komplex szám a következő alakba írható: $z = a + i \cdot b$, ezt nevezzük z *algebrai alak*jának. a-t a *komplex* szám *valós részének*, b-t pedig a *képzetes részé*nek nevezzük. A z *konjugáltja* a $\bar{z} = a - i \cdot b$ komplex szám. Egy z komplex szám *abszolút érték*e a $|z| = (a^2 + b^2)^{1/2}$ szám.

Komplex számok *trigonometrikus alak*ja: $z = |z| \cdot (cos\alpha + i \cdot sin\alpha)$. Ha $0 \neq z \in \mathbb{C}$, akkor a $-\pi < \alpha \leq \pi$ szöget z *argumentum*ának nevezzük.

Komplex számok szorzása. Legyen $z = |z| \cdot (cos\alpha + i \cdot sin\alpha)$ és $w = |w| \cdot (cos\beta + i \cdot sin\beta)$. Ekkor könnyen belátható, hogy $z \cdot w = |z \cdot w| \cdot (cos(\alpha + \beta) + i \cdot sin(\alpha + \beta))$. Ebből következik, hogy minden nem nulla z komplex és minden n természetes számra $z^n = |z|^n \cdot (cos(n\alpha) + i \cdot sin(n\alpha))$.

5.2. Könnyebb

1. Fejezd ki algebrai alakban a következő számokat:
a) $(3 + i)(2 + 3i)$; **b)** $(1 - 2i)(5 + i)$; **c)** $(2 - 5i)^2$; **d)** $(1 - i)^3$.

2. Írd a lehető legegyszerűbb alakba a következő kifejezéseket:
a) i^3; **b)** i^5; **c)**i^8; **d)** $\frac{1}{i^2}$; **e)** $\frac{1}{i}$; **f)** $\frac{1}{i^3}$.

3. A következő számokat fejezd ki algebrai alakban:
a) $\frac{3+4i}{1-2i}$; **b)** $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$; **c)**$\frac{1}{(1+i)^2}$; **d)** $\frac{1}{(2-i)(1+2i)}$; **e)** $\frac{1}{2+3i} + \frac{1}{2-3i}$; **f)** $\frac{1}{3+i} + \frac{1}{1+7i}$.

4. Add meg az a és b valós számok értékét, ha:
a) $(a + bi)(2 - i) = a + 3i$; **b)** $(a + i)(1 + bi) = 3b + ai$.

5. Legyen $\frac{5}{x+yi} + \frac{2}{1+3i} = 1$, ahol x és y valós számok. Add meg x és y értékét!

6. Add meg a következő számokat trigonometrikus alakban:
a) $\sqrt{3} + i$; **b)** $1 - i$; **c)** $4i$; **d)** -3; **e)** $\frac{10}{\sqrt{3}-i}$; **f)** $\frac{2+3i}{5+i}$; **g)** $3 - 4i$; **h)** $-2 + i$.

7. Számítsd ki a következő kifejezéseket a trigonometrikus alak felhasználásával: **a)** $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$; **b)** $\left(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$.

8. Add meg a $-7 - 24i$ komplex szám négyzetgyökeit algebrai alakban.

9. Vonjunk négyzetgyököt a következő számokból: **a)** $3 - 4i$; **b)** $2i$; **c)** $8 + 6i$.

10. Oldd meg a következő másodfokú egyenletet: $(2 + i)x^2 - (5 - i)x + (2 - 2i) = 0$.

11. Számold ki a $z = -16 \cdot \sqrt{3} + 16i$ szám ötödik gyökeit!

12. Vonj harmadik gyököt **a)** 1- ből; **b)** $2 + 2i$-ből.

13. Vonj negyedik gyököt a következő számból: $\frac{-4}{(2+i)^3}$.

14. Bizonyítsd be a komplex számok segítségével, hogy egy paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével.

15. Ábrázoljuk a $z = 2 + i$ komplex számot a Gauss-számsíkon vektorral. Adjuk meg algebrai alakban és ábrázoljuk ugyanezen az ábrán a következőket: $-z$; $\overline{z}$; $-\overline{z}$; iz; $-iz$.

16. Mi a geometriai jelentése a következőknek:
a) $|z_1 - z_2|$; **b)** i-vel való szorzás ; **c)** $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$-vel való szorzás; **d)** $\cos\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n}$-nel való szorzás.

17. Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyeknek megfelelő komplex számokra
a) $|z| = 2Re(z)$; **b)** $\left|\frac{z-3i}{z+i}\right|$; **c)** $z = \frac{1}{\overline{z}}$; **d)** $z = -\frac{1}{\overline{z}}$; **e)** $|z| = iz$.

18. A $z = x + yi$ komplex számnak a Gauss számsíkon feleltessük meg a Z pontot. Tudjuk, hogy a $\frac{z-2i}{z+4}$ komplex szám valós része zérus. Bizonyítsuk be, hogy Z mértani helye egy körön van rajta. Keressük meg a kör középpontját, és mutassuk meg, hogy a sugara $\sqrt{5}$.

5.3. Nehezebb

1. Mivel egyenlő a következő kifejezés, ha $n \in \mathbb{N}$: $(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n$?

2. Mutasd meg, hogy $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

3. Bizonyítsd be, hogy $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cdots + \cos^2 nx = \frac{n}{2} + \frac{\cos(n+1)x\sin x}{2\sin x}$.

6. Számelmélet

6.1. Könnyebb

1. Állapítsd meg, milyen maradékot adnak a természetes számok négyzetei 3-mal és 5-tel osztva.

2. Igaz-e, hogy minden 3-nál nagyobb p prímnek van 6-tal osztható szomszédja?

3. Bizonyítsd be, hogy $n^5 - 5n^3 + 4n$ osztható 120-szal. (n tetszőleges egész szám.)

4. Bizonyítsd be, hogy $665|3^{6n} - 2^{6n}$.

5. Bizonyítsd be, hogy öt egymást követő egész szám négyzetének az összege nem négyzetszám.

6. Bizonyítsuk be, hogy 30 osztója az $mn(m^4 - n^4)$ számnak, bármilyen m, n egész szám esetén.

7. A szultán 100 cellájában száz rab raboskodik. A szultán leküldi egymás után 100 emberét. A k-adik alkalommal leküldött ember minden k-adik cella zárján állít egyet, ha nyitva volt, bezárja, ha zárva volt, akkor kinyitja. Kezdetben minden cella zárva volt. Mely sorszámú cellák lesznek a végén nyitva?

8. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy n természetes számnak ugyanannyi páros osztója legyen, mint ahány páratlan?

9. Az euklideszi algoritmussal számítsd ki az alábbi számpárok legnagyobb közös osztóját, és add meg a legkisebb közös többszörösüket is.
a) $a = 86, b = 31$; **b)** $a = 139, b = 102$; **c)** $a = 255, b = 111$; **d)** $a = 332, b = 88$.

10. Oldd meg az alábbi diofantikus egyenleteket:
a) $172x + 62y = 38$; **b)** $82x + 22y = 34$; **c)** $450x + 86y = 100$; **d)** $125x + 45y = -20$.

11. Oldd meg az alábbi kongruenciákat:
a) $21x \equiv 14 \pmod{35}$; **b)** $172x \equiv 6 \pmod{62}$; **c)** $3x \equiv 8 \pmod{13}$; **d)** $12x \equiv 9 \pmod{18}$.

12. Keresd meg a következő egyenletek egész megoldásait kongruenciák felhasználásával: **a)** $84x+37y = 2$; **b)** $41x+30y = 3$.

13. Bontsd fel 463-at két természetes szám összegére úgy, hogy az egyik szám osztható legyen 14-gyel, a másik 23-mal. Oldjuk meg a feladatot kongruenciák segítségével.

14. Oldd meg a következő kongruencia-rendszert:
$5x \equiv 3 \pmod 7$
$3x \equiv 7 \pmod 8$.

15. Oldd meg a következő kongruencia-rendszert:
$x \equiv 2 \pmod 3$
$x \equiv 3 \pmod 4$
$x \equiv 1 \pmod 5$.

16. Oldd meg a következő kongruencia-rendszert:
$4x \equiv 2 \pmod 3$
$3x \equiv 2 \pmod 7$
$9x \equiv 7 \pmod{11}$.

6.2. Nehezebb

1. ...